UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

Phantasie ist wichtiger als Wissen, denn Wissen ist begrenzt.
Albert Einstein (1879–1955, Physiker)

10. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 16.01.2020, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 10.1. (2 + 4 = 6 Punkte)

(a) Bestimmen sie das zur folgenden Tabelle

x_k	-2	-1	0	1
$f(x_k)$	4	1	6	7
$f'(x_k)$		1	5	

gehörende Interpolationspolynom in der Form $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$.

(b) Bestimmen Sie zu folgender Tabelle

x_k	0	1	2	4
f_k	4	5	11	37

die zugehörige natürliche kubische Splinefunktion.

Aufgabe 10.2. (1.5 + 1.5 + 2 = 5 Punkte)

Seien $n+1$ Interpolationspunkte x_j, $j = 0, \ldots, n$, mit Werten $f_j \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Lagrangedarstellung des zugehörigen eindeutigen Interpolationspolynoms p vom Grad n lautet

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, \ell_j(x), \quad \ell_j = \prod_{k=0, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Gewichte w_j in der alternativen Darstellung

$$p(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} f_j, \tag{2}$$

wobei

$$\ell(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)\,.$$

Wie muss diese Darstellung abgeändert werden, wenn ein weiterer Interpolationspunkt x_{n+1} hinzugefügt wird?

(b) Wie viele Rechenoperationen sind notwendig, um das Interpolationspolynom p in der Darstellung (2) auszuwerten? Vergleichen Sie die Anzahl an Operationen mit der für Darstellung (1) und der für die Newtondarstellung mittels dividieren Differenzen.

(c) Leiten Sie ausgehend von (2) die zweite Darstellung

$$p(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} f_j \right) \Bigg/ \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} \right) \tag{3}$$

her und bestimmen Sie für die Tschebyscheff-Punkte

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2} \right), \quad j = 0, \dots, n,$$

passende Gewichte w_j.

Aufgabe 10.3. (Programmieraufgabe, 5 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie eine gegebene Datentabelle approximieren und die Ergebnisse mit der Programmieraufgabe zur Interpolation vergleichen. Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Sie kompilieren es mit

```
cc main.c CC.c basic_LinAlg.c -lm
```

Die Daten aus der Datei `daten.dat` liegen erneut im Format

x_0	x_1	...	x_m
f_0	f_1	...	f_m

vor. Betrachten Sie die Menge der Monome $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ und das diskrete Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\, g(x_i)$$

mit induzierter Norm

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Die Approximationsaufgabe lautet nun

$$\min_{c_j \in \mathbb{R}} \left\| f - \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \right\|$$

für die Koeffizienten $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$.

(a) Führen Sie die Minimierungsaufgabe in ein lineares Gleichungssystem $Ac = b$ über. Speichern Sie die Matrix A im symmetrischen Format als untere Dreiecksmatrix.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem mithilfe der Cholesky-Zerlegung für $n = 3$ und geben Sie die Koeffizienten c_j aus. Visualisieren Sie die Approximation zusammen mit den Punkten aus der Datentabelle und der Interpolation aus der letzten Programmieraufgabe. Diskutieren Sie kurz Ihr Ergebnis.