Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.
Euklid (365-300 v.Chr., griechischer Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

11. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 23.01.2020, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 11.1. (4 Punkte)
Bestimmen Sie zu der Funktion

$$f:\ [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|\,,$$

ein trigonometrisches Polynom p so, dass der Fehler $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)-p(x)|$ kleiner als 10^{-2} ist.

Aufgabe 11.2. (3 + 1 = 4 Punkte)
Gegeben seien eine Zerlegung $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ und Werte $f_k = f(x_k)$, $k = 0,\ldots,n$, sowie Randdaten $f'(a)$, $f'(b)$ einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sei weiterhin

$$\Phi = \left\{\varphi \in C^2[a,b] \mid \varphi(x_k) = f_k,\ k = 0,\ldots,n,\ \text{und } \varphi'(a) = f'(a), \varphi'(b) = f'(b)\right\}$$

und $s \in \Phi$ der vollständige kubische Spline. Zeigen Sie, dass s die eindeutige Minimumstelle des Funktionals

$$E : \Phi \to \mathbb{R},\ E(\varphi) = \int_a^b \left|\varphi''(x)\right|^2 dx,$$

in Φ ist, d.h. für alle $\varphi \in \Phi$ gilt:

(a) $E(s) \le E(\varphi)$ und

(b) $E(\varphi) = E(s) \implies \varphi = s$.

Aufgabe 11.3. (2.5 + 2.5 + 3 = 8 Punkte)
Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_x(t) = (t-x)_+ = \max(t-x, 0),$$

und ihre Potenzen $f_x^r(t) = (t-x)_+^r$ für $r > 0$ und für $r = 0$

$$f_x^0(t) = \begin{cases} 1, & t > x, \\ 0, & t \le x. \end{cases}$$

Weiter erinnern wir daran, dass für $t_i \le t_{i+1} \ldots \le t_{i+r}$ die dividierten Differenzen einer Funktion f definiert sind durch

$$\begin{aligned} f[t_i,\ldots,t_{i+r}] &= \frac{f^{(r)}(t_i)}{r!}, && \text{falls } t_i = t_{i+r}, \\ f[t_i,\ldots,t_{i+r}] &= \frac{f[t_{i+1},\ldots,t_{i+r}] - f[t_i,\ldots,t_{i+r-1}]}{t_{i+r}-t_i}, && \text{sonst.} \end{aligned}$$

Sei nun $r \geq 1$ und $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ eine nichtabnehmende Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$\inf_{i\in\mathbb{Z}} t_i = -\infty, \ \sup_{i\in\mathbb{Z}} t_i = \infty \text{ und } t_j < t_{j+r} \text{ für alle } j.$$

Wir definieren den i-ten B-spline der Ordnung r zur Folge $\mathbf{t}$ als

$$B_{i,r,\mathbf{t}} = (t_{i+r} - t_i) f_x^{r-1}[t_i, \dots, t_{i+r}].$$

Zeigen Sie:

(a) Für $x \notin [t_i, t_{i+r}]$ gilt $B_{i,r,\mathbf{t}}(x) = 0$.

(b) Für $t_i < x < t_{i+r}$ gilt $B_{i,r,\mathbf{t}}(x) > 0$.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_i B_{i,r,\mathbf{t}}(x) = 1,$$

und die Summe enthält nur endlich viele Terme ungleich 0.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) für die Funktionen $N_{i,r}(x) = B_{i,r,\mathbf{t}}(x)/(t_{i+r} - t_i)$ und $r \geq 2$ die folgende Rekursionsformel:

$$N_{i,r}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_{i,r-1}(x) + \frac{t_{i+r} - x}{t_{i+r} - t_i} N_{i+1,r-1}(x).$$

Aufgabe 11.4. (Bonusaufgabe, 4 Punkte)

Betrachten Sie die Zerlegung

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

des Intervalls $[a, b]$. Für $k \in \mathbb{N}$ nennen wir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Splinefunktion vom Grad k, wenn

- f auf jedem Teilintervall (x_i, x_{i+1}) einem Polynom vom Grad k entspricht und
- f in den inneren Knoten x_i, $1 \leq i \leq n - 1$, mindestens $(k - 1)$-mal differenzierbar ist.

Die Menge der Splinefunktionen vom Grad k bezeichnen wir mit $S_{\Delta,k}$. Die Dimension dieses reellen Vektorraums ist $n + k$. Sei nun $\mathbf{t} = (t_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ wieder eine nichtabnehmende Folge mit

$$t_j < t_{j+k+1} \text{ für alle } j \text{ und } t_j = x_j \text{ für } j = 0, \dots, n.$$

Zeigen Sie: Die Restriktionen $(B_i)_{|[a,b]}$ der B-splines

$$B_i = B_{i,k+1,\mathbf{t}}, \quad i = -k, -k + 1, \dots, n - 1,$$

auf $[a, b]$ bilden eine Basis von $S_{\Delta,k}$.