So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.
Ernst Mach (1838–1916, österreichischer Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

12. Übungsblatt zur Vorlesung

Einführung in die Numerik im WS 2019/2020

Abgabe: Donnerstag, den 30.01.2020, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 12.1. (2 + 2 = 4 Punkte)
Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

(a) Leiten Sie die Simpson-Regel her, indem Sie Gewichte $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ bestimmen, sodass die Quadraturformel

$$S(f) = \omega_0\, f(a) + \omega_1\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \omega_2\, f(b)$$

das Integral $\int_a^b p(x)\, dx$ für alle Polynome $p \in \mathbb{P}_2$ exakt berechnet.

(b) Sei $f \in C^2([a, b])$. Leiten Sie für die Trapezregel

$$T(f) = \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b))$$

die Fehlerabschätzung in der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - T(f) \right| \le \frac{1}{12}\, \|f''\|_\infty\, (b-a)^3$$

mittels Taylor-Entwicklung her.

Aufgabe 12.2. (2 + 2 = 4 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, n$ mit $h = (b-a)/n$, eine äquidistante Diskretisierung des Intervalls $[a, b]$. Die zusammengesetzte Trapezformel lautet

$$T_n(f) = h\left(\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2} f(x_n)\right) \approx I(f) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

(a) Beweisen Sie, dass für konvexes f stets $I(f) \le T_n(f)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Trapezformel T_n für $n \ge 2$ bei Anwendung auf die Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ den exakten Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx$ liefert.

Hinweis: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls

$$f(\tau x + (1-\tau) y) \le \tau f(x) + (1-\tau) f(y), \quad x, y \in [a, b],$$

für alle $\tau \in [0, 1]$ gilt.

Aufgabe 12.3. (4 Punkte)

Sei $\varrho(x) \geq 0$ eine gegebene Gewichtsfunktion auf $[a, b]$ und die Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Orthogonalsystem bezüglich ϱ, d.h., die Polynome $p_0, p_1, \ldots$ sind paarweise orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varrho$,

$$\langle f, g\rangle_\varrho = \int_a^b \varrho(x)\, f(x)\, g(x)\, dx,$$

und der Grad von p_n ist exakt n mit höchstem Koeffizienten gleich 1. Die Orthonalpolynome genügen einer Drei-Term-Rekursion der Form

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - \beta_0, \quad p_n(x) = (x - \beta_{n-1})\, p_{n-1} - \gamma_{n-1}^2 p_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

mit Koeffizienten $\beta_n \in \mathbb{R}$ und $\gamma_n \in \mathbb{R}_{>0}$. Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \beta_0 & -\gamma_1 & \cdots & 0 & \\ -\gamma_1 & \beta_1 & -\gamma_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\gamma_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{J}$ gerade die Stützstellen $x_1, \ldots, x_n$ der Gaußschen Quadraturformel vom Grad n sind und die Gewichte $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sich daraus folgendermaßen ergeben:

$$\sigma_k = \langle 1, 1\rangle_\varrho \Big/ \sum_{j=0}^{n-1} (\tau_j\, p_j(x_k))^2, \quad k = 1, \ldots, n,$$

mit

$$\tau_j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 0, \\ (-1)^j/(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_j) & \text{für } j = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Aufgabe 12.4. (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sodass die Jacobi-Matrix $F'(x)$ in jedem Punkt $x \in D$ invertierbar ist. Weiterhin gelte für ein $\omega > 0$ die folgende Lipschitz-Bedingung

$$\left\| F'(z)^{-1} \left(F'(y) - F'(x)\right)(y - x) \right\| \leq \omega \left\| y - x \right\|^2$$

für kollineare $x, y, z \in D$. Für das Newton-Verfahren

$$F'(x^k)\Delta x^k = -F(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

erfülle die Anfangnäherung x^0 die Bedingungen

$$h_0 = \omega \left\|\Delta x^0\right\| < 2$$

und $\overline{B}_\rho(x_0) \subset D$ für

$$\rho = \frac{\left\|\Delta x^0\right\|}{1 - {}^1\!/\!_2 h_0}.$$

Beweisen Sie, dass die Folge der Newton-Iterierten in $B_\rho(x_0)$ liegt und gegen eine Lösung $x^* \in \overline{B}_\rho(x_0)$ von $F(x) = 0$ konvergiert. Leiten Sie dabei die folgenden Fehlerabschätzungen her:

$$\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \frac{1}{2}\omega \left\|x^k - x^{k-1}\right\|^2, \quad \left\|x^k - x^*\right\| \leq \frac{\left\|x^k - x^{k+1}\right\|}{1 - \frac{1}{2}\omega \left\|x^k - x^{k+1}\right\|}.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für mehrere Veränderliche.