Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.
Carl Friedrich Gauß
(1777-1855, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, B. Sc.

1. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 26.04.2018 in der Vorlesung.

Bitte melden Sie sich bis spätestens **20. April 2018** zur Vorlesung an. Die Übungen werden von Clemens Meiser gehalten und finden immer donnerstags von 16-18 Uhr im SR2(U.36, E2.5) statt. Sie dürfen die Aufgaben in Gruppen von maximal zwei Personen bearbeiten.

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Beweisen Sie:

$$f \text{ Lipschitz stetig auf } D \Rightarrow f \text{ gleichmäßig stetig auf } D \Rightarrow f \text{ stetig auf } D.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung der obigen Aussage falsch ist. Finden Sie hierzu jeweils ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 1.2. (3 Punkte)

Charakterisieren Sie die DGL, d.h. geben sie die folgenden Eigenschaften ohne Umformungen an: Ordnung der DGL, explizit/implizit, (in-)homogen, (nicht) linear.

(a) $y\cosh(x) + \frac{y''}{\sqrt{1-x^2}} - 5x^2 = 0$,

(b) $y^{(5)} = y'' \tan(x) - y' + \sin(x)$,

(c) $y^{(4)} = 3ye^x - 8xy''' + \frac{y}{x}$,

(d) $2xy + 3y'' - y''' = \sin(y)$,

(e) $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = x - xy'$,

(f) $y' = y^2 \cos(x)$.

Aufgabe 1.3. (3 Punkte)

Betrachten Sie für $x_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem (AWP)

$$y' = \lambda y, \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{mit } y_0 \neq 0.$$

(a) Lösen Sie das AWP durch Trennung der Veränderlichen.

(b) Lösen Sie das AWP mithilfe des Potenzreihenansatzes

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung des AWPs eindeutig ist.

— *bitte wenden* —

Aufgabe 1.4. (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden DGL durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

(a) $y' = e^y \cos(x)$,

(b) $y' = \sqrt{1-y^2}, \quad 0 < y < 1$,

(c) $y' = (x+y)^2, \quad y > 0$,

(d) $\left(1+x^2\right) y' + xy - xy^2 = 0, \quad y > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie folgende Substitutionen:

$$z = x + y \text{ für (c)} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{y} \text{ für (d).}$$