Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welche die Natur uns zuwarf, zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.
Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717-1783)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, B. Sc.

3. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Bis Freitag, den 11.05.2018 im Raum 3.29 in E1.1
oder im Briefkasten des Lehrstuhls in E1.1.

Aufgabe 3.1. (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Form $y' = Ay + b$, $y(x_0) = y_0$, mit

$$\text{(a)}: A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; b(x) = (\sin(x), \cos(x), 0)^\top, \; x_0 = 0, \; y_0 = (1,1,1)^\top,$$

$$\text{(b)}: A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; b(x) = 0, \; x_0 = 0, \; y_0 = (-1,0,3)^\top.$$

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)

Lineare DGL 2. Ordnung der Form

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad x > 0,$$

werden Eulersche Differentialgleichungen genannt.

(a) Zeigen Sie, dass die obige DGL durch die Substitution $t = \ln(x)$ in eine lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten umgewandelt wird. Was ist mit dem Fall $x < 0$?

(b) Lösen Sie die DGL

$$x^2 y'' + xy' - y = x\ln(x), \quad x > 0.$$

Aufgabe 3.3. (8 Punkte)

Betrachten Sie die Sturmsche Randwertaufgabe $Lu = f$, $R_1 u = 0$, $R_2 u = 0$ mit

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x), \quad x \in (a,b), \\ R_1 u &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a), \\ R_2 u &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b), \end{aligned}$$

wobei p stetig differenzierbar und positiv auf $[a,b]$, q und f stetig und die Vektoren $(\alpha_1, \alpha_2)^\top$, $(\beta_1, \beta_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mit Hilfe der Variation der Konstanten ist es möglich, eine Integraldarstellung der Lösung zu erhalten. Hierzu:

(a) Gegeben sei ein reelles Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ der homogenen Gleichung $Lu = 0$ ohne Rücksicht auf die Randbedingungen. Zeigen Sie, dass das Funktionensystem $\{v_1, v_2\}$ gegeben durch

$$v_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 \quad \text{und} \quad v_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2,$$

$$c_{11} = R_1 u_2, \; c_{12} = -R_1 u_1, \; c_{21} = R_2 u_2, \; c_{22} = -R_2 u_1,$$

ein Fundamentalsystem definiert, falls

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Weiter erfüllt das Fundamentalsystem die Bedingungen $R_1 v_1 = 0$ und $R_2 v_2 = 0$.

(b) Zeigen Sie die Lagrange Identität

$$0 = v_1(x)(Lv_2)(x) - v_2(x)(Lv_1)(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)W(x)\right),$$

wobei

$$W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x),$$

und folgern sie daraus $p(x)W(x) = p(a)W(a) = \text{const} \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

(c) Führen Sie das Vefahren der Variation der Konstanten durch. Verwenden Sie dazu den Ansatz $v(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ und fordern Sie zur Vereinfachung $c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2(x) = 0$. Zeigen Sie die Darstellung

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)v_2(x)}{p(x)W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{f(x)v_1(x)}{p(x)W(x)}.$$

(d) Folgern Sie die Darstellung für v:

$$v(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{f(\xi)v_1(\xi)v_2(x)}{p(a)W(a)}\, d\xi - \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)v_2(\xi)v_1(x)}{p(a)W(a)}\, d\xi, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

(e) Um die Sturmsche Randwertaufgabe zu lösen, fehlt noch die Bestimmung von x_0 und x_1. Zeigen Sie mithilfe der Randbedingungen $R_1 v = 0$ und $R_2 v = 0$ und Teil (a), dass $x_0 = b$, $x_1 = a$ gelten muss.

(f) Leiten Sie mit (e) die Integraldarstellung

$$v(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\, d\xi, \quad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{v_1(\xi)v_2(x)}{p(a)W(a)}, & a \leq \xi \leq x \leq b, \\[2mm] \dfrac{v_2(\xi)v_1(x)}{p(a)W(a)}, & a \leq x \leq \xi \leq b, \end{cases}$$

der Lösung der Sturmschen Randwertaufgabe her. Die Funktion G wird auch Greensche Funktion genannt.

(g) Bestimmen Sie die Greensche Funktion für die Randwertaufgabe

$$u'' + \frac{1}{4x^2}u = 0 \ \text{ in } (1,2), \quad u(1) = u(2) = 0.$$

Hinweis: Substituieren Sie $x = e^t$, um ein Fundamentalsystem zu finden.