Alles, was in der Mathematik geschieht, dient einzig und allein der Ehre des menschlichen Geistes.
Carl Gustav Jacob Jacobi
(1804-1851, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, B. Sc.

4. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 17.05.2018 in der Vorlesung.

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen unter Zuhilfenahme des Ansatzes vom Typ der rechten Seite:

(a) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$,

(b) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$,

(c) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$,

(d) $y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x$.

(b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 3 = x, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 1,$$

mithilfe der Variation der Konstanten.

Aufgabe 4.2. (3 Punkte)

Gegeben sei die DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten stetige Funktionen $a_i : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ seien. Zeigen Sie: Die Wronski-Determinante $W : I \to \mathbb{R}$ eines Fundamentalsystems von Lösungen von (1) genügt der DGL

$$W'(x) + a_{n-1}(x)W(x) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst folgende Regel für die Differentiation einer Determinante: Sei $\Phi = (\varphi)_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix, deren Koeffizienten differenzierbare Funktionen $\varphi_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sind. Dann gilt:

$$\frac{d}{dx} \det \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi'_{i1}(x) & \dots & \varphi'_{in}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

wobei im i-ten Summanden nur die i-te Zeile der Matrix differenziert wird.

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Die Heavysidefunktion ist definiert durch

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

(a) Seien $a > 0$, $b \geq 0$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Laplace-transformierbar für $s > b$. Zeigen Sie die Identität

$$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s), \quad s > b,$$

d.h. der Verschiebung um a in der Zeit entspricht die Multiplikation mit e^{-as} im Frequenzbereich.

(b) Bestimmen Sie durch geeignete Verwendung des vorherigen Aufgabenteils die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 4y = g(t), \quad y'(0) = y(0) = 0,$$

wobei die rechte Seite gegeben ist durch

$$g(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{\pi}{2}, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Visualisieren Sie die Graphen der Funktion g und der Lösung y mittels `gnuplot` und geben Sie die Plots mit ab.

Aufgabe 4.4. (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie mithilfe der Beispiele aus der Vorlesung die inversen Laplace-Transformationenen der folgenden Funktionen

$$F_1(s) = \frac{2}{s^2 + 3s - 4}, \; F_2(s) = \frac{3s}{s^2 - s - 6}, \; F_3(s) = \frac{4}{(s-1)^3}, \; F_4(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - 2s^2 + s}.$$

(b) Sei $Q(t)$ ein Polynom vom Grad n mit paarweise verschiedenen Nullstellen $t_1, \ldots, t_n$ und $P(t)$ ein Polynom vom Grad n. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(t)}{Q(t)}\right](s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(t_k)}{Q'(t_k)} e^{t_k s}.$$

(c) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Laplace-transformierbar und periodisch mit Periode $T > 0$. Zeigen Sie durch Ausnutzen der Eigenschaften der Laplace-Transformation, dass

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

gilt.

(d) Ein Elektron mit Masse m und Ladung e bewegt sich auf einer Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), 0)^\top$ unter dem Einfluss des elektrischen Feldes $\mathbf{E} = (0, E, 0)^\top$ und des magnetischen Feldes $\mathbf{H} = (0, 0, H)^\top$, $E, H > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} mx'' - eHy' &= 0, \\ my'' + eHx' &= eE, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lösen Sie das DGL-System mithilfe der Laplace-Transformation. Visualisieren Sie die Bahnkurve des Elektrons mit `gnuplot` und geben Sie den Plot mit ab.

Hinweis: Setzen Sie zur Übersichtlichkeit $a = \frac{eH}{m}$ und $b = \frac{E}{H}$.