So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.
Thomas Mach
(1828-1916, böhmischer Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

5. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 24.05.2018 in der Vorlesung.

Aufgabe 5.1. (5 Punkte)

Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,$$

oder in kurzer Form

$$Ly = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(x) = 0 \quad \text{mit } a_n = 1. \tag{1}$$

(a) Schreiben Sie (1) in ein System $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ von DGL erster Ordnung um und zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ die Gestalt

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

hat.

(b) Beweisen Sie nun folgenden Satz:

> **Satz.** *Ist λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so entsprechen ihr k Lösungen*
>
> $$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x} \tag{2}$$
>
> *der DGL (1). Aus den n Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ (jede mit ihrer Vielfachheit gezählt) ergeben sich auf diese Weise n unabhängige Lösungen, also ein Fundamentalsystem.*
> *Dieses Fundamentalsystem enthält, falls komplexe Nullstellen auftreten, komplexe Lösungen. Sind die a_i reell, so lässt sich ein reelles Fundamentalsystem gewinnen, indem man zu einer komplexen Nullstelle $\lambda = \mu + i\nu$ von k-ter Ordnung die k Lösungen (2) in Real- und Imaginärteil aufspaltet,*
>
> $$x^q e^{\mu x}\cos\nu x,\ \ x^q e^{\mu x}\sin\nu x,\ \ (q = 0, 1, \ldots, k-1),$$
>
> *und die k zu $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$ gehörenden Nullstellen streicht.*

Gehen Sie hierfür wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie zunächst, dass $e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(ii) Zeigen Sie danach, dass für eine k-fache Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $x^q e^{\lambda x}$ $(0 \leq q < k)$ Lösungen von (1) sind.
Hinweis: Schreiben Sie $x^q e^{\lambda x}$ als eine Ableitung von $e^{\lambda x}$ nach λ.

(iii) Um den Beweis des Satzes zu vervollständigen, müssen Sie noch die lineare Unabhängigkeit der Lösungen zeigen. Hierzu betrachten Sie eine beliebige Linearkombination der Gestalt

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) e^{\lambda_i x},$$

wobei $p_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, Polynome und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polyoms (mehrfache Nullstellen nur einmal gezählt) sind. Beweisen Sie, dass $\phi(x)$ nur dann identisch verschwindet, wenn alle $p_i \equiv 0$ sind.

Aufgabe 5.2. (6 Punkte)
Betrachten Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= x, \\ y(0) = y'(0) &= 1, \end{aligned}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$.

(a) Berechnen Sie die Lösung des AWPs.

(b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Eulerschen Polygonzugverfahrens die Lösung des AWPs.

(i) Überführen Sie das AWP zunächst in eine DGL 1.Ordnung. Benutzen Sie dabei die Notation $Y = (y_1, y_2)^\top$ mit $y_1 = y$ und $y_2 = y'$.

(ii) Sei nun das Gitter $G_h = \{kh \mid k = 0, 1, \dots N\}$ mit Weite $h > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Darstellung

$$Y_{k+1} = BY_k + kH$$

gilt, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix}, \quad H = (0, h^2)^\top$$

und Y_k die k-te Iterierte des Polygonzugverfahrens ist.

(iii) Finden Sie eine nicht rekursive Darstellung für Y_{k+1}.

(iv) Setzen Sie $h = x/k$ für festes $x \in (0, 1]$ und beweisen Sie, dass für $k \to \infty$ bzw. $h \to 0$ das Polygonzugverfahren gegen die exakte Lösung im Punkt x konvergiert.

Aufgabe 5.3. (5 Punkte) **Programmieraufgabe**
In dieser praktischen Aufgabe implementieren Sie das Eulersche Polygonzugverfahren und testen es anhand der folgenden AWPs

$$y' = 1 + (y - x)^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$y' = -200xy^2 \quad \text{mit} \quad y(-3) = \frac{1}{901}. \tag{4}$$

Das erste AWP soll auf dem Intervall $[0, 1.95]$ und das zweite auf dem Intervall $[-3, 3]$ untersucht werden.

(a) Implementieren Sie in C das Eulersche Polygonzugverfahren für die beiden Anfangswertprobleme. Verwenden Sie eine gleichmäßige Diskretisierung des Intervalls in $n = 2^i$, $i = 0, \dots, 15$ Teilintervalle.

(b) Plotten Sie jeweils die exakte Lösung sowie die Approximationen zu den verschiedenen Werten von n in ein Koordinatensystem. Was können Sie erkennen?

(c) Plotten Sie für das AWP (3) den absoluten Approximationsfehler $|y_h(x^*) - y(x^*)|$ an der Stelle $x^* = 1.95$ in Abhängigkeit von n. Hierbei bezeichnet y_h ihre approximative und y die exakte Lösung des Problems.

Info: Praktische Aufgaben

Sie können die praktischen Aufgaben in Gruppen von bis zu vier Personen bearbeiten. Die Aufgaben müssen in C programmiert werden. Schicken Sie den Quelltext mitsamt Plots bis zum Abgabetermin am 24.05.2018 vor der Vorlesung per E-Mail an

`Clemmmi[at]web.de`

Vergessen Sie nicht, die Namen Ihrer Gruppenmitglieder in den Text der E-Mail zu schreiben. Die executables sollten vor Abgabe gelöscht werden, da andernfalls der Spamfilter der Uni die E-Mail unter Umständen nicht zustellt. In der Übungsstunde muss jede Gruppe ihre Lösung vorstellen.