Unermesslich ist die Fülle von Problemen in der Mathematik, und sobald ein Problem gelöst ist, tauchen an dessen Stelle zahllose neue Probleme auf.
David Hilbert
(1866-1943, deutscher Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

6. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Bis Freitag, den 01.06.2018 im Raum 3.29 in E1.1
oder im Briefkasten des Lehrstuhls in E1.1.

Aufgabe 6.1. (3 Punkte)

Betrachten Sie das Einschrittverfahren

$$y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k; h), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \; y_0 = y(0),$$

mit der Verfahrensfunktion

$$F(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2}\left(f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Verfahren die Approximationsordnung 2 besitzt. Welche Bedingungen müssen hierfür an y gestellt werden?

(b) Welchen Nachteil hat ein Verfahren mit einer solchen Verfahrenfunktion?

(c) Welche Terme mit partiellen Ableitungen von f müssen Sie F hinzufügen, um ein Verfahren der Ordnung 3 zu erhalten? Geben Sie die entsprechende Verfahrenfunktion an und beweisen Sie die Approximationsordnung.

Aufgabe 6.2. (5 Punkte)

Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems ($0 < t \leq T$)

$$y'(t) = f(t, y(t))) \; , \; y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

betrachte man für $0 < N \in \mathbb{N}$, $\tau := T/N$, $t_n := n\tau$, das Einschrittverfahren

$$y_{n+1} = y_n + \tau\Phi(t_n, y_n, \tau), \quad 0 \leq n < N.$$

Bei fehlerhaftem Anfangswert $\tilde{y}_0$ und unter Rundungsfehlereinfluss berechnet der Computer jedoch

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \tau\Phi(t_n, \tilde{y}_n, \tau) + \epsilon_n.$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion das diskrete Lemma von Gronwall:
Seien $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\theta_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ reelle Folgen mit $h_n, \theta_n \geq 0$ für $n \geq 0$. Gibt es eine Konstante $L > 0$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; \theta_{n+1} \leq (1 + Lh_n)\theta_n + |\epsilon_n| \, ,$$

so folgt mit $t_n := \sum_{i=0}^{n-1} h_i$:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; \theta_n \leq e^{L(t_n - t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_n - t_{i+1})} |\epsilon_i| \, .$$

(b) Zeigen Sie: Wenn die Inkrementfunktion Lipschitz-stetig bzgl. y ist, d.h.

$$\exists L > 0 : \, |\Phi(t,x,\tau) - \Phi(t,y,\tau)| \le L\,|x-y|\,,$$

so ist das Einschrittverfahren stabil bzgl. Anfangswert und Rundungsfehlern, d.h. es gilt

$$\max_{0\le n\le N} |\tilde{y}_n - y_n| \le e^{LT}\left(|\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\epsilon_n|\right).$$

Aufgabe 6.3. (3 Punkte)

Sei $F(x,y,h)$ die Verfahrensfunktion eines expliziten Einschrittverfahrens der Ordnung $m \ge 1$. Zeigen Sie, dass das daraus abgeleitete Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F(x_k, y_k, h)\right)$$

mindestens die Ordnung 2 besitzt. Nehmen Sie hierfür an, dass die exakte Lösung y dreimal, die Funktion f zweimal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 6.4. (5 Punkte) **Programmieraufgabe**

In dieser Programmieraufgabe implementieren Sie zwei weitere Verfahren zur numerischen Approximation von AWP und untersuchen diese auf Konvergenz. Wählt man in Aufgabe 6.3 die Funktion $F(x_k, y_k, h) = f(x_k, y_k)$, so erhält man das modifizierte Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)\right).$$

Das zweite zu betrachtende Verfahren ist die Methode von Heun. Hierbei handelt es sich um ein Runge-Kutta-Verfahren mit Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 4/6 & 1/6 \end{array}$$

(a) Implementieren Sie in C das modifizierte Euler-Verfahren und die Methode von Heun für die beiden AWP (1) und (2) aus der letzten Programmieraufgabe. Verwenden Sie eine gleichmäßige Diskretisierung des Intervalls $[0, 1.95]$ bzw. $[-3, 0]$ in $n = 2^i$, $i = 0, \dots, 15$ Teilintervalle.

(b) Vergleichen Sie nun die drei Verfahren (Euler, modifiziertes Euler, Heun). Geben Sie zu den beiden AWP den absoluten Approximationsfehler $e_i = |y_{h_i}(x^*) - y(x^*)|$ am Ende des Intervalls, d.h. an der Stelle $x^* = 1.95$ bzw. $x^* = 0$, für die verschiedenen Werte von n an. Hierbei bezeichnet h_i die Schrittweite für $n = 2^i$. Berechnen Sie außerdem die numerische Konvergenzrate

$$\mathrm{eoc}_{i+1} = \frac{\log(e_{i+1}) - \log(e_i)}{\log(h_{i+1}) - \log(h_i)} \quad \text{für } i = 0, \dots, 14.$$

Stellen Sie Ihre Ergebnisse zu den verschiedenen Paarungen von AWP und Methode in je einer Tabelle zusammen.

(c) Als nächstes soll ein weiteres AWP

$$y' = 1 - y + \sqrt{x}\left(x + \frac{3}{2}\right), \quad y(0) = 1,$$

auf dem Intervall $[0, 0.5]$ betrachtet werden. Die exakte Lösung lautet $y(x) = x^{3/2} + 1$. Wenden Sie alle drei Verfahren auf dieses Problem an und erstellen Sie wie in Aufgabenteil (b) Tabellen mit dem absoluten Fehler im Punkt $x^* = 0.5$ und der numerischen Konvergenzrate. Plotten Sie außerdem Ihre Approximationen und die exakte Lösung. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus (b).