Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
Bertrand Russell
(1872-1970, britischer Philosoph)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

7. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 07.06.2018 in der Vorlesung.

Aufgabe 7.1. (6 Punkte) Betrachten Sie ein implizites Runge-Kutta-Verfahren der Form

$$\begin{aligned} k_i &= f\left(x_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right), \quad i = 1, \dots, s, \\ y_1 &= y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i. \end{aligned}$$

Leiten Sie die Bedingungsgleichungen der Ordnung 3 her.

(a) Versuchen Sie zunächst das Verfahren mittels Taylorentwicklung aus der Vorlesung. Warum ist diese Methode nicht gut anwendbar?

(b) Betrachten Sie die Funktion y_1 als eine Funktion

$$y_1(h) = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i(h)$$

von h. Vergleichen Sie die Ableitungen der Funktionen y_1 und y für $h = 0$ um Bedingungsgleichungen zu erhalten. Setzen Sie zur Vereinfachung $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i$, $i = 1, \dots, s$.

(c) Betrachen Sie das implizite Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Bestimmen Sie γ so, dass das Verfahren mindestens Ordnung 3 besitzt.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte) Eine Möglichkeit zur Steigerung der Konsistenzordnung eines Einschrittverfahrens ist Extrapolation. Betrachten Sie dazu das Verfahren, das man erhält, indem man die Näherungen aus einem Eulerschritt der Schrittweite h und zwei Eulerschritten der Schrittweite $\frac{h}{2}$ auf $h = 0$ extrapoliert.

(a) Bestimmen Sie die Näherungen $y_h(x_{k+1})$ und $y_{h/2}(x_{k+1})$.

(b) Berechnen Sie das lineare Interpolationspolynom $\eta(h)$ zu den Stützpunkten $(h, y_h(x_{k+1}))$ und $(h/2, y_{h/2}(x_{k+1}))$, d.h. es soll gelten $\eta(h) = y_h(x_{k+1})$ und $\eta(h/2) = y_{h/2}(x_{k+1})$.

(c) Werten Sie das Polynom η an der Stelle 0 aus (Extrapolation) und zeigen Sie, dass das so gewonnen Verfahren von der Ordnung 2 ist. Vergleichen Sie den Aufwand dieses Verfahrens mit dem des Euler-Verfahrens.

Aufgabe 7.3. (6 Punkte) **Programmieraufgabe**
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

auf dem Intervall $[0, 5]$ und das aus den vorangegangenen Programmieraufgaben bekannte AWP

$$y' = -200xy^2, \quad y(-3) = \frac{1}{901},$$

auf dem Intervall $[-3, 0]$. Implementieren Sie zu beiden Problemen in C implizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccc}
\frac{5-\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{10-3\sqrt{15}}{45} & \frac{25-6\sqrt{15}}{180} \\
\frac{1}{2} & \frac{10+3\sqrt{15}}{72} & \frac{2}{9} & \frac{10-3\sqrt{15}}{72} \\
\frac{5+\sqrt{15}}{10} & \frac{25+6\sqrt{15}}{180} & \frac{10+3\sqrt{15}}{45} & \frac{5}{36} \\
\hline
 & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18}
\end{array}$$

auf einer gleichmäßigen Diskretisierung mit $n = 2^i$, $i = 0, \ldots, I$, Teilintervallen. Verwenden Sie zum Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems die in der Vorlesung vorgestellte Methode der einfachen Iteration. Brechen Sie hierbei die Iteration nach N Schritten ab.

(a) Spielen Sie mit den Parametern N und I etwas herum. Welche Konvergenzrate erwarten Sie und wie müssen Sie die Parameter wählen?

(b) Was geschieht, wenn Sie N klein wählen, z.B. $N = 2, 4$? Wie sind Ihre Beobachtungen zu erklären?

(c) Wenn Sie die optimalen Parameter aus Aufgabenteil (a) nehmen und I vergrößern, beispielsweise $I = 12, 15$, so verschlechtert sich der Approximationsfehler für große n. Begründen Sie dieses Verhalten.

(d) Bei Ihren Versuchen ist Ihnen sicherlich aufgefallen, dass auch bei guten Parametern N und I für die ersten Werte von n der Approximationsfehler sehr groß ist (> 1). Begründen Sie dieses Verhalten und beweisen Sie Ihre Aussage zumindest für das erste AWP.

Erstellen Sie für die Aufgabenteile (a) bis (c) und für beide AWP jeweils Tabellen, die in Abhängigkeit von n den Approximationsfehler am Intervallende angeben. Bestimmen Sie darüber hinaus die numerische Konvergenzrate eoc. Geben Sie auch die Werte für N und I an, die Sie verwendet haben.