*An Archimedes wird man noch Denken, wenn Aischylos längst vergessen ist, denn Sprachen sterben, mathematische Ideen jedoch nicht.*
Godfrey Harold Hardy
(1877-1947, britischer Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

## 8. Übung zur Vorlesung

# Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 14.06.2018 in der Vorlesung.

**Aufgabe 8.1. (3 Punkte)**
Berechnen Sie die Konsistenzordnung des folgenden expliziten linearen Mehrschrittverfahrens zur numerischen Lösung von $y' = f(x, y)$, $y(0) = \alpha$,

$$3y_j - 3y_{j-4} = h(8f_{j-1} - 4f_{j-2} + 8f_{j-3}).$$

**Aufgabe 8.2. (4 Punkte)**
Betrachten Sie das Problem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -300 & 0 \\ 0 & -598 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Benutzen Sie zur numerischen Lösung die implizite Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

und leiten Sie per Hand eine explizite Darstellung der Iterierten $y_n$ her. Was lässt sich über die Qualität der Näherungen aussagen?

**Aufgabe 8.3. (4 Punkte)**
Betrachten Sie das Milne-Simpson-Verfahren

$$y_{j+2} - y_j = \frac{h}{3}(f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j), \quad j = 0, \dots, N_h - 2$$

(a) Geben Sie die Lösung des Verfahrens für die Testgleichung $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, an. Verwenden Sie die Startwerte $y_0 = 1$, $y_1 = e^{\lambda h}$ mit Schrittweite $h > 0$ und $\lambda = -1$.

(b) Diskutieren Sie das Verhalten der Lösung für $h \to 0$.

*Hinweis:* Verwenden Sie für die Lösung den Ansatz

$$y_j = \alpha\lambda_1^j + \beta\lambda_2^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad \lambda_{1/2} = \frac{-2h \pm \sqrt{9 + 3h^2}}{3 + h}.$$

— *bitte wenden* —

**Aufgabe 8.4. (5 Punkte)** **Programmieraufgabe**

In dieser Aufgabe implementieren Sie Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung und testen sie anhand des Anfangswertproblems

$$y' = -(\sin(x^3) + 3x^2\cos(x^3))y, \quad y(0) = 1,$$

auf dem Intervall $[0, 3]$.

(a) Realisieren Sie zunächst das aus der Vorlesung bekannte Bogacki-Shampine-Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
3/4 & 0 & 3/4 & & \\
1 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & \\
\hline
 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & 0 \\
 & 7/24 & 1/4 & 1/3 & 1/8
\end{array}$$

Hierbei ist

$$(b_i)_i = (2/9, 1/3, 4/9, 0), \quad (\hat{b}_i)_i = (7/24, 1/4, 1/3, 1/8).$$

Geben Sie den punktweisen Fehler zwischen der exakten und approximativen Lösung in eine Datei aus und visualisieren Sie die Ergebnisse für drei verschiedene verschiedene Anfangsschrittweiten $h_0$ und Fehlerschranken $\varepsilon$. Geben Sie darüber hinaus noch die Anzahl der ausgeführten Schritte und die Anzahl der Funktionsaufrufe der rechten Seite an.

(b) Wiederholen Sie Teil (a) für das Dormand-Prince-Verfahren

$$\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
1/5 & 1/5 & & & & & & \\
3/10 & 3/40 & 9/40 & & & & & \\
4/5 & 44/45 & -56/15 & 32/9 & & & & \\
8/9 & 19372/6561 & -25360/2187 & 64448/6561 & -212/729 & & & \\
1 & 9017/3168 & -355/33 & 46732/5247 & 49/176 & -5103/18656 & & \\
1 & 35/384 & 0 & 500/1113 & 125/192 & -2187/6784 & 11/84 & \\
\hline
 & 35/384 & 0 & 500/1113 & 125/192 & -2187/6784 & 11/84 & 0 \\
 & 5179/57600 & 0 & 7571/16695 & 393/640 & -92097/339200 & 187/2100 & 1/40
\end{array}$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des Bogacki-Shampine-Verfahrens.