Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.
Blaise Pascal
(1623-1662, französischer Mathematiker und Philosoph)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

9. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 21.06.2018 in der Vorlesung.

Aufgabe 9.1. (4.5 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung die Mehrschrittverfahren nach Adams behandelt. Hier soll nun die Herleitung und die Idee dieses Verfahrens behandelt werden. Dazu seien $x_i = x_0 + ih$ die Gitterpunkte. Die numerischen Approximationen von $y_n, \dots, y_{n-k+1}$ an die exakten Lösungen $y(x_n), \dots, y(x_{n-k+1})$ der Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

seien bekannt. Betrachten Sie nun die Gleichung in integrierter Form

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))\, dt\,. \tag{1}$$

(a) Legen Sie ein Interpolationspolynom

$$p(t) = p(x_n + sh)$$

durch die nach Voraussetzung bekannten Punkte

$$\{\,(x_i, f_i) \mid i = n-k+1, \dots, n\,\}\,.$$

Verwenden Sie dazu die Interpolationsformel nach Newton.

Hinweis: In *Stoer/Bulirsch Numerische Mathematik 1* finden Sie eine Einleitung zur Polynominterpolation.

(b) Ersetzen Sie f in Gleichung (1) durch den in (a) gefundenen Interpolanten und finden Sie eine Darstellung der Form

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \Phi_j(f),$$

wobei γ_j und $\Phi_j(\cdot)$ zu bestimmen sind.

(c) Konstruieren Sie explizit ein Verfahren für $k = 3$.

(d) Fügen Sie nun (x_{n+1}, f_{n+1}) zu den Interpolationspunkten hinzu. Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) und (b) und konstruieren Sie ein Verfahren für $k = 2$.

— *bitte wenden* —

Aufgabe 9.2. (4.5 Punkte)
Im Vergleich zu Adams-Verfahren wird bei BDF-Verfahren nicht die rechte Seite, sondern die approximative Lösung durch ein Polynom interpoliert. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

und die Diskretisierung $x_i = x_0 + ih$, wobei die letzten k Approximationen $y_n, \ldots, y_{n-k+1}$ bekannt sind.

(a) Legen Sie ein Interpolationspolynom $q(x)$ durch die Stützpunkte

$$\{ (x_i, y_i) \mid i = n-k+1, \ldots, n+1 \}.$$

Verwenden Sie dazu wieder die Interpolationsformel nach Newton.

(b) Leiten Sie aus der Forderung

$$q'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

die allgemeine Form der BDF-Verfahren her.

(c) Konstruieren Sie explizit Verfahren für $k = 1, 2$ und 3.

Aufgabe 9.3. (3 Punkte)
Überprüfen Sie die BDF-Verfahren aus der vorherigen Aufgabe

(a) $y_{n+1} - y_n = hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

(b) $3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1} = 2hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

(c) $11y_{n+1} - 18y_n + 9y_{n-1} - 2y_{n-2} = 6hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

auf Nullstabilität.

Aufgabe 9.4. (4 Punkte) Programmieraufgabe
In dieser Aufgabe implementieren Sie den Kahan-Summmationsalgorithmus aus der Vorlesung. Betrachten Sie wieder die Testgleichung

$$y' = -(\sin(x^3) + 3x^3 \cos(x^3))y, \quad y(0) = 1,$$

auf dem Intervall $[x_0, X] = [0, 2.867]$.

(a) Implementieren Sie das Standard-Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 mit und ohne Rundungsfehlerkompensation.

(b) Wählen Sie eine konstante Schrittweite $h = (X - x_0)/2^k$ für $k = 4, 5, \ldots, 25$ und werten Sie beide Methoden im Endpunkt X aus. Geben Sie den Fehler in Abhängigkeit von k in eine Datei aus und plotten Sie die Ergebnisse in logarithmischer Skalierung.