Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
Bertrand Russell
(1872-1970, britischer Philosoph)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

10. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 28.06.2018 in der Vorlesung.

Aufgabe 10.1. (5 Punkte)
Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$u''(t) = -20u'(t) - 19u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1,\ u'(0) = -10,$$

soll das Adams-Verfahren

$$u_j = u_{j-1} + \frac{1}{12}h(5f_j + 8f_{j-1} - f_{j-2}), \quad j = 2, 3, \ldots,$$

verwendet werden. Wie klein muss die Schrittweite h bemessen sein, damit in jedem Zeitschritt die Konvergenz der Fixpunktiteration zur Berechnung von u_j garantiert ist?

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)
Betrachten Sie für $\mu \in [0, 1]$ das Verfahren

$$y_n = y_{n-1} + h(\mu f_{n-1} + (1 - \mu) f_n)$$

und bestimmen Sie den Stabilitätsbereich in Abhängigkeit von μ. Für welche μ ist das obige Verfahren A-stabil?

Aufgabe 10.3. (3 (+ 2) Punkte)
In dieser Aufgabe bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion für das s-stufige implizite Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} g_i &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(x_0 + c_j h, g_j), \quad i = 1, \ldots, s, \\ y_1 &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(x_0 + c_j h, g_j). \end{aligned} \tag{1}$$

Wendet man das Verfahren auf das Modellproblem $y' = \lambda y$ an, so erhält man eine Darstellung der Form

$$y_1 = R(z) y_0$$

mit $z = h\lambda$. Die Funktion R heißt Stabilitätsfunktion des Verfahrens.

(a) Leiten Sie die Formel

$$R(z) = 1 + z b^\top (I - zA)^{-1} \mathbb{1}$$

her, wobei

$$b^\top = (b_1, \ldots, b_s), \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{s}, \quad \mathbb{1} = (1, \ldots, 1)^\top.$$

(b) Beweisen Sie die Identität

$$R(z) = \frac{\det(I - zA + z\mathbb{1}b^\top)}{\det(I - za)}.$$

(c) (+2) Analog zu Mehrschrittverfahren ist der Stabilitätsbereich definiert durch

$$S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1 \,\}.$$

Gilt $\mathbb{C}^- \subset S$, so heißt das Verfahren A-stabil. Zeigen Sie: Das Verfahren (1) ist genau dann A-stabil, wenn

$$|R(iy)| \leq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

und

$$R \text{ holomorph auf } \mathbb{C}^- \text{ ist.}$$

Hinweis: Teil (c) ist nicht verpflichtend, Sie können jedoch Bonuspunkte sammeln.

Aufgabe 10.4. (4 Punkte) Programmieraufgabe

Bestimmen Sie für $k = 1, \ldots, 7$ die Stabilitätsgebiete S_k der BDF-Verfahren

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+1} = h f_{n+1},$$

wobei

$$\begin{aligned} \nabla^0 y_i &= y_i, \\ \nabla^j y_i &= \nabla^{j-1} y_i - \nabla^{j-1} y_{i-1}, \end{aligned}$$

und visualisieren Sie die Ränder ∂S_k mittels `gnuplot`. Drucken Sie die Plots aus und markieren Sie die Stabilitätsgebiete S_k. Für welche k sind die BDF-Verfahren A-stabil, $A(\alpha)$-stabil oder nullstabil? Geben Sie die Plots in der Vorlesung und die `gnuplot`-Skripte per E-mail ab.