In der Mathematik gibt es keine Meinungsverschiedenheiten; selbst Wahnsinnige, wenn sie überhaupt noch verstehen, wovon die Rede ist, sehen die mathematischen Wahrheiten ein.
Arthur Schopenhauer
(1788-1860, deutscher Philosoph)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

11. Übung zur Vorlesung

Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 05.07.2018 in der Vorlesung.

Aufgabe 11.1. (4 Punkte)
Es seien $a < b$ und $p, q, g \in C[a, b]$ stetige Funktionen mit $q(x) \leq 0$, $x \in [a, b]$. Weiter sei $y \in C^2[a, b]$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) + p(x)y' + q(x)y(x) &= g(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) &= \beta, \end{aligned}$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstant sind. Zeigen Sie: Erfüllt $z \in C^2[a, b]$

$$\begin{aligned} z''(x) + p(x)z' + q(x)z(x) &\leq g(x), \quad x \in [a, b], \\ z(a) \leq \alpha, \quad z'(a) &\leq \beta, \end{aligned}$$

so gilt

$$z(x) \leq y(x), \quad z'(x) \leq y'(x), \quad x \in [a, b],$$

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)
Das Randwertproblem

$$u'' = 100u(x), \quad x \in [0, 3], \quad u(0) = 1, \; u(3) = e^{-30},$$

soll mit dem einfachen Schießverfahren gelöst werden. Berechnen Sie dazu die Lösung $y(x; s)$ des AWP

$$y''(x) = 100y(x), \quad x \geq 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = s,$$

und bestimmen Sie $s = s^*$, sodass $y(3; s^*) = e^{-30}$ gilt. Wir groß ist der relative Fehler in $y(3; s^*)$, wenn s^* mit einem relativen Fehler ϵ behaftet ist?

Aufgabe 11.3. (4 Punkte)
Betrachten Sie das lineare RWP

$$Ly = y'' - xy' + 4y = x, \quad y(0) = 1, \; y(1) = 0.$$

Es wird eine approximative Lösung $z(x)$ als Linearkombination von geeigneten Ansatzfunktionen w_k gesucht, d.h.

$$z(x) = w_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k w_k(x) \tag{1}$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{R}$ konstant.

(a) Bestimmen Sie als Ansatzfunktionen Polynome w_k vom Grad $k+1$, sodass w_0 die Randbedingungen erfüllt, also

$$w_0(0) = 1, \quad w_0(0) = 0,$$

und die restlichen w_k den homogenen Randbedingungen

$$w_k(0) = w_k(1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

genügen.

(b) Um die Koeffizienten α_k zu bestimmen, bietet es sich an, das Verfahren der Kollokation anzuwenden. Fordern Sie hierzu, dass ihr Ansatz der Form (1) die Differentialgleichung in m verschiedenen Punkten $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1$ erfüllt. Leiten Sie daraus ein lineares Gleichungssystem für die α_k her.

(c) Lösen Sie das Problem numerisch für $m = 4$ und die Kollokationspunkte

$$x_i = i/5, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

und berechnen Sie das Residuum

$$Lz - x.$$

Aufgabe 11.4. (4 Punkte)

In dieser Aufgabe lösen Sie das RWP

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (0,1), \\ \alpha_0 u_0 + \beta_0 v_0 &= \mu_0, \\ \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 &= \mu_1, \end{aligned}$$

wobei

$$u_0 = u(0),\ u_1 = u(1),\ v_0 = u'(0),\ v_1 = u'(1),$$

mittels der Darstellungsformel. Die Funktion $u^*(x,y)$ heißt Fundamentallösung des Differentialoperators L, falls

$$\int_0^1 u(x) L u^*(x,y)\, dx = u(y), \quad y \in (0,1), \tag{2}$$

für alle hinreichend regulären u gilt.

(a) Zeigen Sie: die Fundamentallösung des Differentialoperators $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ist gegeben durch

$$u^*(x,y) = \frac{1}{2}(1 - |x-y|), \quad x, y \in [0,1].$$

Hinweis: Das Integral (2) existiert nicht im regulären Sinne, da $Lu^*(y,y)$ nicht definiert ist. Berechnen Sie es stattdessen durch Anwendung von partieller Integration auf

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} u(x) L u^*(x,y)\, dx \right).$$

(b) Multiplizieren Sie die DGL $-u''(x) = f(x)$ mit $u^*(x,y)$ und integrieren Sie über $(0,1)$ bezüglich x, d.h.

$$\int_0^1 u''(x) u^*(x,y)\, dx = \int_0^1 f(x) u^*(x,y)\, dx\,.$$

Lösen Sie nun mittels partieller Integration und der Eigenschaft (2) die Gleichung nach $u(y)$ auf, um die Darstellungsformel

$$u(y) = \frac{1}{2} y v_1 - \frac{1-y}{2} v_0 + \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_0 - \int_0^1 f(x) u^*(x,y)\, dx, \quad y \in (0,1), \tag{3}$$

zu erhalten.

(c) Bilden Sie in (3) die Grenzwerte für $y \to 0$ und $y \to 1$. Leiten Sie aus den resultierenden Gleichungen ein lineares Gleichungssystem für die Randwerte u_0, u_1, v_0 und v_1 her.