

Vor allem die mathematischen Wissenschaften zeichnen sich aus durch Ordnung, Symmetrie und Beschränkung; und dies sind die größten Formen des Schönen.

Aristoteles

(384-322 v.Chr., Philosoph)



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

FR Mathematik
Dr. S. Weißer
D. Seibel, M. Sc.

12. Übung zur Vorlesung Numerik II im SoSe 2018

Abgabe: Donnerstag, den 12.07.2018 in der Vorlesung.

Aufgabe 12.1. (16 Punkte) Programmieraufgabe

In dieser Aufgabe implementieren Sie das einfache Schießverfahren für skalare Gleichungen. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$y'' = \frac{3}{2}y^2, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1. \quad (1)$$

Das einfache Schießverfahren sucht ausgehend vom Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= \frac{3}{2}y_1^2, \\ y_1(0) &= 4, \quad y_2(0) = s, \end{aligned} \quad (2)$$

den Parameter s so, dass die Randbedingung $y(1) = y_1(1) = 1$ erfüllt ist. Dies ist äquivalent zur Bestimmung einer Nullstelle von $F(s) = y(1; s) - 1$. In der Vorlesung wurde zur iterativen Lösung das Newton-Verfahren vorgestellt:

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - \frac{F(s^{(i)})}{\Delta F(s^{(i)})}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei $s^{(i)}$ die i -te Iterierte und $\Delta F(s^{(i)})$ die Differenzenapproximation

$$\Delta F(s^{(i)}) = \frac{F(s^{(i)} + \Delta s^{(i)}) - F(s^{(i)})}{\Delta s^{(i)}}$$

an die Ableitung $F'(s^{(i)})$ ist.

- Realisieren Sie das beschriebene Schießverfahren für das Beispiel (1). Verwenden Sie zum Lösen der AWP in jedem Schritt das Standard-Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4. Wählen Sie wie in der Vorlesung vorgeschlagen $\Delta s^{(i)} = s^{(i)} \sqrt{\varepsilon}$ mit Maschinengenauigkeit ε und brechen Sie die Iteration ab, wenn $d^{(i)} = s^{(i)} - s^{(i+1)}$ betragsmäßig kleiner als 10^{-10} ist.
- Testen Sie Ihr Verfahren für die Startwerte $s^{(0)} = -30, -20, -10, -2$ und plotten Sie jeweils die Lösungen der AWP (2) für die ersten 5 Iterierten.
- Plotten Sie außerdem $F(s)$ und den absoluten Fehler $y(1; s) - 1$ in Abhängigkeit von s für die verschiedenen Startwerte.