Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen als durch die maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.
Carl Friedrich Gauß (1777-1855),
deutscher Mathematiker und Astronom

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und $A : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine matrixwertige Funktion, deren Einträge einmal stetig differenzierbar sind. Zeigen Sie, dass partielle Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

in allen Punkten elliptisch ist, in denen A symmetrisch und positiv definit ist. Hierbei bezeichnet ∇u den Gradienten der Funktion u.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare und beschränkte Funktion. Wir betrachten das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung,

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{4t}(x-z)^2\right) u_0(z)\,\mathrm{d}z, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist. Beweisen Sie weiterhin, dass

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, in dem u_0 stetig ist.

Hinweis: Nutzen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{4t}(x-z)^2\right) \mathrm{d}z = 1$$

für alle $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ (Beweis?) und betrachten Sie die Differenz $u(t,x) - u_0(x)$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

In dieser Aufgabe untersuchen wir das unterschiedliche Verhalten der Lösungen der Wellen- und Wärmeleitungsgleichung. Sei dazu $R > 0$ und $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, beschränkte und messbare Funktion mit

$$\operatorname{supp} u_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u_0(x) \neq 0\}} \subseteq [-R, R]$$

und $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}) > 0$. Hierbei ist λ das Lebesgue-Maß. Wir betrachten die Anfangswertprobleme

$$\begin{array}{l|l} \partial_t u_1(t,x) = \partial_x^2 u_1(t,x), \ (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, & \partial_t^2 u_2(t,x) = \partial_x^2 u_2(t,x), \ (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ \quad u_1(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}. & \quad u_2(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}, \\ & \partial_t u_2(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass

$$u_1(t,x) > 0$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$, während

$$u_2(t,x) = 0,$$

solange $|x - t| > R$ und $|x + t| > R$.