With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk.
John von Neumann (1903–1957)
Ungarisch-amerikanischer Mathematiker

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 3

Aufgabe 1 (2 + 5 Punkte)
Sei $\Omega = (0, 1)$. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir das Randwertproblem

$$\varepsilon y'' + y' = 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1$.

a) Geben Sie die analytische Lösung an. Was beobachten Sie im Grenzfall $\varepsilon \to 0$?

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $h = 1/n$ diskretisieren wir obiges Randwertproblem mit finiten Differenzen:

$$\varepsilon \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

und $y_0 = 0$, $y_n = 1$. Finden Sie durch die Linearkombination des Exponentialansatzes q^i, $i = 0, \ldots, n$, $q \in \mathbb{R}$, einen geschlossenen Ausdruck für die Werte des Gittervektors $(y_i)_{i=0}^n$. Was passiert für $\varepsilon \to 0$? Welche Besonderheit stellen Sie für $h = \varepsilon$ fest?

Aufgabe 2 (5 + 2 Punkte)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_3 & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$$

durch die Matrix

$$F_n[j,k] = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n^{-jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{j\,k}{n}\right), \quad j,k = 0, \ldots, n-1,$$

diagonalisiert wird,

$$F_n C F_n^\top = \operatorname{diag}(d),$$

wobei $d = F_n c$. Hierbei ist $\omega_n = \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,/n)$ eine n-te Einheitswurzel und i die imaginäre Einheit.

b) Für $\Omega = (0,1)$ betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega$$

mit der Anfangsbedingung $u(0,\cdot) = u_0$ und periodischen Randbedingungen $u(t,0) = u(t,1)$ für $t > 0$. Diskretisieren Sie das AWP mit dem σ-Schema und geben Sie das resultierende lineare Gleichungssystem an. Wie lässt sich dieses effizient lösen?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \quad t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in (0,1), \end{aligned}$$

wird das (zweistufige) Schema

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + 2\gamma\Big(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n - u_m^{n+1} - u_m^{n-1}\Big)$$

mit $\gamma = \tau/h^2$ benutzt. Bestimmen Sie die Approximationsordnung. Ist das Verfahren L_2-stabil? Nehmen Sie für die Analyse an, dass τ und h so gewählt werden, dass γ konstant ist.

Hinweis: Für ein Differenzenverfahren der Form $L_h u_h = f_h$ mit dem Gittervektor $u_h = (u_m^n)_{n,m}$ und der Zeitschrittweite τ und Maschenweite h definieren das charakteristische Polynom $\Phi(g,\theta)$, das man aus $L_h u_h$ gewinnt, wenn man für u_h den Ansatz

$$u_n^m = g^n \exp(\mathrm{i}\, m\theta)$$

wählt. Hierbei ist g^n die n-te Potenz von g. Es gilt:

Wenn das charakteristische Polynom Φ nicht explizit von τ und h abhängt, dann ist für die L_2-Stabiltät des Differenzenverfahrens die Nullstellenbedingung notwendig und hinreichend. Die Nullstellenbedingung ist erfüllt, wenn für jede Nullstelle $g(\theta)$ von $\Phi(g,\theta)$ gilt

i) $|g(\theta)| \leq 1$ *und*

ii) *aus* $|g(\theta)| = 1$ *folgt, dass* $g(\theta)$ *eine einfache Nullstelle ist.*