Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.
Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)
Deutscher Dichter

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 4

Hinweis

Auf diesem Blatt implementieren wir die Finite-Differenzen-Diskretisierung für das zweidimensionale Poissonproblem. Auf der Webseite der Veranstaltung finden Sie eine Vorlage für Ihre Abgabe, die Sie verwenden dürfen.

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Für eine Folge des positiven Diskretisierungsparameters $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei der Fehler $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eines Verfahrens gegeben durch

$$e_n = Ch_n^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

für $C > 0$ und $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$k = \frac{\log(e_m/e_n)}{\log(h_m/h_n)}, \quad n \neq m.$$

Der Term auf der rechten Seite wird *numerische Konvergenzrate* genannt.

Für den Rest des Übungsblatts beschäftigen wir uns mit der numerischen Approximation des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } (0,1)^2, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial[0,1]^2, \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen f, g. Wie in der Vorlesung diskretisieren wir zunächst $(0,1)^2$ durch ein Gitter mit Maschenweiten h_1, h_2 und n_1 bzw. n_2 Zellen je Dimension. Setzen wir dann die 5-Punkte-Approximation für den Laplace-Operator ein, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$A_h u_h = b_h,$$

mit $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $u_h, b_h \in \mathbb{R}^N$, $N = (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

Aufgabe 2 (7 + 7 = 14 Punkte)

a) Implementieren Sie die Funktion `build_rhs_fdm()`, welche b_h berechnet.

b) Implementieren Sie die Funktion `addmul_fdm()`, welche die Operation

$$v_h \leftarrow v_h + \alpha A_h u_h$$

durchführt, *ohne* die Matrix A_h explizit abzuspeichern.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$A_h u_h = b_h$$

mit dem CG-Verfahren für $n_1 = n_2 = 2^i$, $i = 2, \dots, 10$ und einer Toleranz $\texttt{tol} = 10^{-10}$. Lassen Sie sich neben N und dem Fehler $e_N = \|u - u_h\|_\infty$ auch die Zahl der benötigten CG-Iterationen I_N ausgeben. Berechnen Sie jeweils die numerischen Konvergenzrate aufeinanderfolgender Datenpunkte für $(N_i, e_{N_i})_{i=2}^{10}$ und $(N_i, I_{N_i})_{i=2}^{10}$. Was beobachten Sie? Deckt sich das mit den Resultaten der Vorlesung?