Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt.
Carl Friedrich Gauß (1777–1855)
Deutscher Mathematiker und Astronom

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 5

Aufgabe 1 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Für $f \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in (C_0^\infty(\Omega))'$ definieren wir das Produkt fu durch

$$\langle \phi, fu \rangle = u(f\phi), \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie:

a) Die Definition ist wohldefiniert, d.h. $fu \in (C_0^\infty(\Omega))'$.

b) Für $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ stimmt das distributionelle Produkt mit dem punktweisen Produkt von f und u überein.

c) Es gilt die Produktregel,

$$\partial_i(fu) = (\partial_i f)u + f(\partial_i u), \quad i = 1, \dots, d.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Berechnen Sie die distributionelle Ableitung von $\mathbb{1}_\Omega$ und zeigen Sie, dass für $u \in C^\infty(\Omega)$

$$\nabla(\mathbb{1}_\Omega u) = (\nabla u)\mathbb{1}_\Omega - u\, n\, \mathrm{d}S$$

in $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))'$. Hierbei ist n die äußere Normale und $\mathrm{d}S$ das Oberflächenmaß von $\partial\Omega$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (nicht unbedingt endlichdimensional) und $f, g : V \to \mathbb{K}$ linear mit

$$\ker f \subseteq \ker g.$$

Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, so dass

$$g = \lambda f.$$

Aufgabe 4 (2 + 4 + 3 = 9 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

a) Für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ definieren wir

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega.$$

Zeigen Sie, dass $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ genau dann, wenn

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

b) Sei $u \in (C_0^\infty(\Omega))'$ mit $u' = 0$. Zeigen Sie, dass $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $u = C$.

c) Seien $f \in C(\Omega)$ und $a \in C^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie: Gilt für $u \in (C_0^\infty(\Omega))'$

$$u' + au = f$$

im distributionellen Sinne, so folgt $u \in C^1(\Omega)$ und obige Gleichung gilt im klassischen Sinne.