The aim of science is to make difficult things understandable in a simpler way; the aim of poetry is to state simple things in an incomprehensible way. The two are incompatible.
Paul Dirac (1902–1984)
Britischer Physiker

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 6

Aufgabe 1 (3 + 2 = 5 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, sodass ein $a > 0$ existiert mit $\Omega \subseteq [-a, a] \times \mathbb{R}^{d-1}$.

a) Zeigen Sie, dass es für alle $p \in [1, \infty)$ ein $C > 0$ gibt mit

$$\|v\|_{0,p,\Omega} \leq C|v|_{1,p,\Omega}$$

für alle $v \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$.

Hinweis: Schreiben Sie $v \in C_0^\infty(\Omega)$ als $v(x) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 v(t, x_2, \ldots, x_d)\,\mathrm{d}t$ und wenden Sie auf $|v(x)|^p$ die Hölderungleichung an.

b) Zeigen Sie mit Teil a): Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es $C > 0$, sodass

$$|v|_{k,p,\Omega} \leq \|v\|_{k,p,\Omega} \leq C|v|_{k,p,\Omega}$$

für alle $v \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$.

Aufgabe 2 (3 + 1 + 2 = 6 Punkte)
In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Einbettung

$$H^1(0,1) \hookrightarrow C[0,1]$$

wohldefiniert und stetig ist. Sei dazu $u \in H^1(0,1)$ mit schwacher Ableitung $u_1 \in L_2(0,1)$.

a) Zeigen, dass

$$v : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int\limits_0^x u_1(y)\,\mathrm{d}y,$$

stetig ist mit schwacher Ableitung u_1.

b) Schließen Sie daraus, dass $u - v$ konstant ist und

$$u(x) = u(y) + \int_y^x u_1(z)\,\mathrm{d}z$$

für alle $0 \leq y \leq x \leq 1$.

c) Zeigen Sie, dass $H^1(0,1) \hookrightarrow C[0,1]$, d.h. $H^1(0,1) \subseteq C[0,1]$ und es exisitert $C > 0$, sodass für alle $u \in H^1(0,1)$:

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq C\|u\|_{H^1(0,1)}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $C^{0,1}$-Rand. Zeigen Sie mithilfe partieller Integration

$$(\nabla v, \nabla w)_{0,2,\Omega} \leq \|v\|_{0,2,\Omega}\|D^2 w\|_{0,2,\Omega}$$

für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Schließen Sie daraus

$$\|\nabla u\|_{0,2,\Omega} \leq \|u\|_{0,2,\Omega}^{1/2}\|D^2 u\|_{0,2,\Omega}^{1/2}$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Seien Ω offen und beschränkt mit $C^{0,1}$-Rand und $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung. Zeigen Sie: Für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt $F(u) \in H^1(\Omega)$ mit $\nabla F(u) = F'(u)\nabla u$.

Hinweis: Wählen Sie eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$, die in $H^1(\Omega)$ gegen u konvergiert, und zeigen Sie, dass $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(F'(u_n)\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L_2(\Omega)$ konvergieren.