UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 7

Aufgabe 1 (4 + 1 = 5 Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $C^{0,1}$-Rand und $p \in [1, \infty)$. Mit $P_m(\Omega)$ bezeichnen wir die Einschränkung der Polynome in d Variablen mit bis einschließlich Grad $m \geq 0$ auf Ω.

a) Zeigen Sie, dass die Halbnorm $|\cdot|_{m+1,p,\Omega}$ zur Quotientennorm

$$\|[u]\|_{W_p^{m+1}(\Omega)/P_m(\Omega)} = \inf_{f \in P_m(\Omega)} \|u - f\|_{m+1,p,\Omega}$$

auf $W_p^{m+1}(\Omega)/P_m(\Omega)$ äquivalent ist.

Hinweis: Benutzen Sie statt $\|\cdot\|_{m+1,p,\Omega}$ eine äquivalente Norm auf $W_p^{m+1}(\Omega)$. Schauen Sie sich dazu die Beispiele nach dem Sobolevschen Normierungssatz im Vorlesungsskript an.

b) Sei $\ell \in (W_p^{m+1}(\Omega))'$, sodass $\ell(v) = 0$ für alle $v \in P_m(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine Konstante C unabhängig von ℓ existiert, sodass

$$|\ell(v)| \leq C\|\ell\||v|_{p,m+1,\Omega}$$

für alle $v \in W_p^{m+1}(\Omega)$.

Anmerkung: Obige Aussagen gelten mit komplett analogen Beweis auch für $p = \infty$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $d \geq 3$ eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x)^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

Hinweis: $|\nabla u + \lambda \frac{x}{|x|^2} u| \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (1 + 4 = 5 Punkte)
Seien V ein reeller Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform und $\varphi \in V'$.

a) Zeigen Sie: Das Variationsproblem

Finde $u \in V$, sodass
$$a(u, v) = \varphi(v)$$
für alle $v \in V$

ist äquivalent zur Gleichung
$$Au = \varphi,$$
wobei $A : V \to V'$ setig linear ist mit $(Au)v = a(u, v)$ für alle $u, v \in V$.

b) Bestimmen Sie $\omega > 0$ so, dass das relaxierte Richardson-Verfahren
$$u_{k+1} = u_k + \omega\, R^{-1}\Big(\varphi - Au_k\Big), \quad k \in \mathbb{N},$$
für jeden Startwert $u_0 \in V$ gegen die eindeutige Lösung von $Au = \varphi$ konvergiert. Hierbei ist $R : V \to V'$ der Riesz-Isormorphismus.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{0,1}$-Rand. Für $u_0 \in H^1(\Omega)$, Koeffizienten $b \in W^1_\infty(\Omega)^d, c \in L_\infty(\Omega)$ und $f \in L_2(\Omega)$ betrachten wir das Variationsproblem

Finde $u \in H^1_0(\Omega)$, sodass
$$a(u, v) = \varphi(v)$$
für alle $v \in H^1_0(\Omega)$,

wobei
$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + b \cdot \nabla u\, v + cuv \,\mathrm{d}x$$
und $\varphi(v) = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x - a(u_0, v)$. Zeigen Sie:

a) a ist eine stetige Bilinearform und φ eine stetige Linearform auf $H^1_0(\Omega)$.

b) Unter der zusätzlichen Voraussetzung
$$c - \frac{1}{2}\operatorname{div} b \geq 1 \quad \text{f.ü.},$$
ist a koerziv und obiges Variationsproblem hat eine eindeutige Lösung.

c) Die Abbildung
$$L_2(\Omega) \to H^1_0(\Omega), f \mapsto u,$$
die einer rechten Seite f die eindeutige Lösung des Variationsproblems u zuordnet, ist stetig.

d) Die Funktion $\widetilde{u} = u + u_0$ erfüllt
$$\begin{aligned} -\Delta\widetilde{u} + b \cdot \nabla\widetilde{u} + c\widetilde{u} &= f \qquad &&\text{in } (C_0^\infty(\Omega))', \\ \gamma_0\widetilde{u} &= \gamma_0 u_0 &&\text{in } L_2(\Gamma). \end{aligned}$$