There are no answers, only cross-references.
Norbert Wiener (1894-1964)
Amerikanischer Mathematiker

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 8

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $\ell : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine nichtkonstante affin-lineare Abbildung. Wir setzen

$$L = \{x \in \mathbb{R}^d : \ell(x) = 0\}.$$

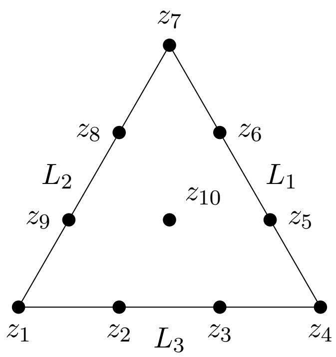
Sei weiterhin p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ in d Variablen mit $p|_L = 0$. Zeigen Sie, dass ein Polynom q vom Grad $n-1$ existiert mit $p(x) = \ell(x)q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Hinweis: Wieso genügt es, den Fall $\ell(x) = x_d$ zu betrachten?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $T \neq \emptyset$ ein nichtdegeneriertes Dreieck in $\mathbb{R}^2$, d.h. zwei verschiedene Kanten schneiden sich in genau einem Punkt. Sei P der Raum der Polynome bis einschließlich Grad drei in zwei Variablen. Zeigen Sie, dass mit

$$\Psi = \{\delta_{z_i} : i = 1, \dots, 10\}$$

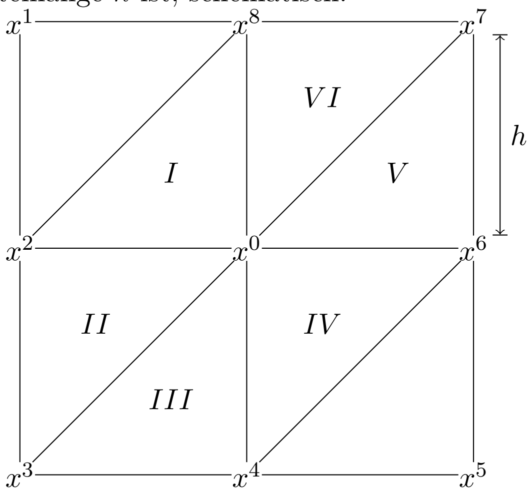
das Tripel (T, P, Ψ) ein Finites Element definiert. Hierbei sind die zehn Auswertungspunkte schematisch wie folgt gewählt:



Die Punkte z_1, z_4, z_7 liegen auf den Ecken des Dreiecks, $z_1, \dots, z_9$ sind disjunkte Punkte auf den jeweiligen Kanten und z_{10} liegt im Innern des Dreiecks. In obiger Skizze bezeichnen L_1, L_2 und L_3 die affin-linearen Funktionen, deren Graph mit der entsprechenden Kante übereinstimmt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes $p \in P$ mit $p(z_i) = 0$, $i = 1, \dots, 9$ ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $p(x) = cL_1(x)L_2(x)L_3(x)$.

Aufgabe 3 (4 + 1 + 1 = 6 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene und beschränkte Menge mit $C^{0,1}$-Rand. Zudem fixieren wir eine zulässige Triangulierung $\mathcal{T}_h$, sodass im Punkt $x^0 \in \Omega$ das Netz lokal eine Quadratgittertriangulierung mit Kantenlänge h ist; schematisch:



Mit φ_i für $i = 0, \ldots, 9$ bezeichnen wir die stückweise lineare Ansatzfunktion, die 1 ist in x^i und 0 in den sonstigen Knoten.

a) Berechnen Sie den lokalen Beitrag zur Steifigkeitsmatrix des Dirichletproblems für die Poissongleichung auf Ω, d.h. geben Sie die Einträge der Matrix

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_0) & a(\varphi_8, \varphi_0) & a(\varphi_7, \varphi_0) \\ a(\varphi_2, \varphi_0) & a(\varphi_0, \varphi_0) & a(\varphi_6, \varphi_0) \\ a(\varphi_3, \varphi_0) & a(\varphi_4, \varphi_0) & a(\varphi_5, \varphi_0) \end{pmatrix}$$

an. Hierbei ist

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

b) Sei $f \in C(\bar{\Omega})$ und

$$\ell(v) = \int_\Omega f\, v \,\mathrm{d}x, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Wie sieht der lokale Beitrag $\ell(\varphi_0)$ zur rechten Seite aus, wenn zur Berechnung die Quadratur

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}x \approx \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^{3} u(z_T^i), \quad u \in C(\bar{\Omega}),$$

benutzt wird? Hierbei bezeichnen (z_T^1, z_T^2, z_T^3) die Eckpunkte des Dreiecks $T \in \mathcal{T}_h$.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und b) mit einer Finiten-Differenzen-Diskretisierung auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite h.

Aufgabe 4 (2 + 3 + 2 = 7 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Polygon. Desweiteren sei $(\mathcal{T}_h)_h$ eine Familie regulärer Triangulierungen von Ω. Für $h > 0$ und $u \in W_1^2(\Omega)$ approximieren wir das Integral über Ω mit der zusammengesetzten Mittelpunktsregel,

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}x = Iu \approx Q_h u = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T| u(m_T).$$

Hierbei ist m_T der Mittelpunkt des Dreiecks T. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, sodass

$$|Iu - Q_h u| \leq C h^2 |u|_{2,1,\Omega}$$

für alle $h > 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie zunächst, dass I und Q_h stetig lineare Funktionale auf $W_1^2(\Omega)$ definieren.

b) Transfomieren Sie beide Seiten auf das Referenzdreieck $\tilde{T}$, bestehend aus den Ecken $(0,0), (1,0), (0,1)$ und nutzen Sie die Resultate von Blatt 7.

c) Schätzen schlussendlich die Halbnormen auf dem Referenzelement gegen die auf $\mathcal{T}_h$ ab.