Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.
Bertrand Russell (1872-1970)
Britischer Philisoph

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
T. Keßler, M. Sc.

Numerik partieller Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $N \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ heißt M-Matrix, falls sie die Form

$$A = sI - B$$

besitzt, wobei $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit $b_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$ und $s \geq \varrho(B)$. Hierbei ist $\varrho(B)$ der Spektralradius von B. Zeigen Sie: Ist A regulär, so hat A^{-1} nur nichtnegative Einträge.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass B den Eigenwert $\varrho(B)$ hat.

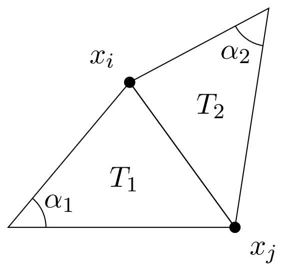
Aufgabe 2 (7 + 1 + 3 + 1 = 12 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Polygon und $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung durch Dreiecke mit spitzen Winkeln. Mit $(\varphi_i)_{i=1}^N$ bezeichnen wir die auf $\mathcal{T}_h$ definierten, stetigen und stückweise linearen Ansatzfunktionen. Dabei ist φ_i 1 im Knoten x_i und 0 auf allen anderen Knoten. Desweiteren bezeichne

$$A = \left(\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \right)_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Zeigen Sie:

a) A ist eine M-Matrix.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Zeilensummen von A verschwinden und drücken Sie a_{ij} für zwei verbundene Knoten x_i und x_j durch die Winkel α_1 und α_2 aus:



b) Nummerieren wir die Knoten so, dass die ersten N_I im Inneren von Ω liegen und die übrigen N_B auf dem Rand, so hat das Gleichungssystem für das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für $f \in L_2(\Omega), g \in L_2(\Omega)$ die Blockgestalt

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_I \\ b_B \end{pmatrix}$$

wobei $A_{II} = A[1,\dots,N_I;1,\dots,N_I]$ und $A_{IB} = A[1,\dots,N_I;1,\dots,N_B]$,

$$b_I[i] = \int_\Omega \varphi_i \, f \, \mathrm{d}x, \quad i = 1,\dots,N_I,$$

und die Einträge von b_B durch Interpolation oder Projektion von g auf $(\varphi_{N_I+i})_{i=1}^{N_B}$ entstehen. Die Finite-Element-Lösung u_h hat dann die Darstellung

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} y_i \varphi_i.$$

c) A_{II} ist invertierbar und zudem gilt

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A_{II})^{-1} & -(A_{II})^{-1} A_{IB} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

d) Es gilt das diskrete Maximumsprinzip für das *homogene* Dirichletproblem:

Ist $f \leq 0$, so folgt $u_h \leq 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Polygon, welches durch die Folge $(\mathcal{T}_h)_{0<h<1}$ von regulären Netzen trianguliert wird. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\exists \sigma > 0 : \forall h : \forall T \in \mathcal{T}_h : \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$$

äquivalent dazu ist, dass die Innenwinkel der Dreiecke uniform in h nach unten beschränkt sind. Welche Konsequenz hat das für die Anzahl der Dreiecke, die sich einen bestimmten Knoten im Netz teilen?