Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher.
Albert Einstein
(1879-1955, deutscher Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

1. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 28.04.2016 vor der Vorlesung.

Aufgabe 1.1. (2+(1+1+1)=5 Punkte)

(a) Sei $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reell-symmetrische Matrix, d.h. es gilt $M = M^\top$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von M reell sind.

(b) Eine reell-symmetrische Matrix M heißt *positiv definit*, falls für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\langle Mx, x\rangle > 0.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Alle Eigenwerte von M sind positiv.

(b) $m_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$.

(c) $\det(M) > 0$.

Aufgabe 1.2. (1+2+1=4 Punkte)

Es sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| \,:\, \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Vektornorm* auf $\mathbb{R}^n$, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Definitheit: $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Homogenität: $\forall x \in \mathbb{V}, \alpha \in \mathbb{R} \,:\, \|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$.

Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{V}$: $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Zeigen Sie, dass durch

(a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,$

(b) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\,,$

(c) $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} (|x_i|)$

Vektornormen auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

Aufgabe 1.3. (0.5+1.5+3.5=5.5 Punkte)
Seien $f_j = (0, \cdots, 0, l_{j+1,j}, \cdots, l_{n,j})^\top \in \mathbb{R}^n, e_k \in \mathbb{R}^n$ der k-te Einheitsvektor und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Für $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ heißt $L_j = I - f_j e_j^\top$ *Frobeniusmatrix* vom Index j.

(a) "Skizzieren" Sie L_j.

(b) Zeigen Sie: L_j^{-1} existiert und hat die Darstellung $L_j^{-1} = I + f_j e_j^\top$.

(c) Sei $L = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$. Zeigen Sie:

$$L = I + \sum_{j=1}^{n-1} f_j e_j^\top.$$

Aufgabe 1.4. (1+(0.5+1+0.5)+2.5=5.5 Punkte)
Eine speichereffiziente Darstellung einer $n \times n$-Matrix liegt z.B. vor, wenn sie sich als *dyadisches Produkt* zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ schreiben lässt:

$$A = uv^\top = (u_i v_j)_{i,j=1}^n \quad .$$

(a) Welchen Rang hat eine solche Matrix?

(b) Sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor bzgl. der euklidischen Norm und die Matrix Q definiert als

$$Q := I - 2ee^\top,$$

wobei I die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie:

  (a) Q ist symmetrisch: $Q = Q^\top$.
  (b) Q ist orthogonal: $QQ^\top = Q^\top Q = I$.
  (c) Q ist involutorisch: $Q^2 = I$.

(c) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von Q an.