Mir wird applaudiert, weil mich jeder versteht, und Ihnen, weil Sie niemand versteht.
Charlie Chaplin (1889-1977, Schauspieler) zu Albert Einstein (1879 - 1955, Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

10. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 30.06.2016 vor der Vorlesung.

Aufgabe 10.1. (6 + 1 = 7 Punkte)

Gesucht ist das zur Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
f_i	-5	-2	-1	0

gehörende eindeutige Interpolationspolynom dritten Grades in der Form $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$.

(a) Berechnen Sie $p(x)$ mit der Formel von Lagrange, dem Schema von Neville und dem Newton-Schema (Dividierte Differenzen).

(b) Der obigen Tabelle wird ein weiterer Stützpunkt (x_4, f_4) hinzugefügt. Erläutern Sie, wie mit den verschiedenen Verfahren am einfachsten die Lösung dieses erweiterten Interpolationspolynoms ermittelt werden kann, wenn Teil a) bereits gelöst wurde.

Aufgabe 10.2. (2.5 + 2.5 = 5 Punkte)

(a) Es sei $p(x)$ das Interpolationspolynom zu der Funktion $f(x) = \ln(x)$ mit den drei Stützstellen $x_0 = 10,\ x_1 = 11$ und $x_2 = 12$.
Geben Sie eine möglichst gute Abschätzung für den größtmöglichen Interpolationsfehler an der Stelle $\overline{x} = 11.1$ an.

(b) Es sei $p(x)$ das Interpolationspolynom zu der Funktion $f(x) = \sin(2x)$ mit den drei Stützstellen $x_0 = -3,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.
Geben Sie eine möglichst gute Abschätzung für den größtmöglichen Interpolationsfehler auf dem Intervall $[-3, 3]$ an.

-Bitte wenden-

Aufgabe 10.3. (Programmieraufgabe, Das Schema von Neville, 2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie eine gegebene Datentabelle interpolieren und mit Hilfe des Schemas von Neville die Interpolation an Zwischenstellen auswerten. Die Datentabelle liegt in einer Datei `daten.dat` im folgenden Format vor:

```
2   n+1
x_0 x_1 x_2 ... x_n
f_0 f_1 f_2 ... f_n
```

(a) Schreiben Sie eine *rekursive* Funktion `phi(long i, long k, ...)`, die die Werte φ_{ik} aus dem Schema von Neville berechnet.

(b) Erstellen Sie ein Hauptprogramm in dem Sie zunächst die Datentabelle einlesen und anschließend den Wert des Interpolationspolynoms φ vom Grad n an der Stelle $x = 0.5$ ausgeben. Berechnen Sie also $\varphi(x)$ für $x = 0.5$, was dem Wert φ_{nn} entspricht.

(c) Als letztes soll das komplette Interpolationspolynom mit Hilfe von `gnuplot` visualisiert werden. Hierzu wird das Intervall $[a, b]$, wobei $a =$`x_0` und $b =$`x_n`, in $N = 80$ äquidistante Teilintervalle $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ zerlegt, mit

$$\xi_j = a + jh \quad \text{für } j = 0, \ldots, N, \qquad \text{wobei} \qquad h = \frac{b-a}{N}.$$

Erstellen Sie nun eine Datei mit den Punkten $(\xi_j, \varphi(\xi_j))$ für $j = 0, \ldots, N$ in dem Format

$$\begin{matrix} \xi_0 & \varphi(\xi_0) \\ \xi_1 & \varphi(\xi_1) \\ \vdots & \vdots \\ \xi_N & \varphi(\xi_N) \end{matrix}$$

und visualisieren Sie diese mit `gnuplot`. Fügen Sie außerdem die Punkte `(x_i,f_i)` für `i=0,...,n` aus der Datentabelle in Ihren Graphen ein. (*Hinweis: Am einfachsten speichern Sie hierzu die Werte aus der Datentabelle in einer neuen Datei, die für gnuplot geeignet ist.*)