Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.
Euklid (365-300 v.Chr., grieschischer Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

11. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 07.07.2016 vor der Vorlesung.

Aufgabe 11.1. (1.5 + 1.5 + 1 = 4 Punkte)

Das Intervall $[-a, a] \subset \mathbb{R},\ a > 0$ sei äquidistant diskretisiert:

$$-a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = a$$

mit

$$x_j = a(-1 + \frac{2}{n} j), \quad j \in \{0, \ldots, n\}.$$

$L_j(x)$ bezeichnet das j-te Lagrangepolynom vom Grad n. Bekanntlich ist dann

$$\varphi(x) := \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x)$$

das interpolierende Polynom zu den Punkten $(x_j, f_j),\ j \in \{0, \ldots, n\}$.

(a) Zeigen Sie

$$x_{n-k} = -x_k,\ k \in \{0, \ldots, n\},$$

und folgern Sie

$$x_j - x_{n-k} = (-1)(x_{n-j} - x_k)$$

(b) Zeigen Sie $L_j(-x) = L_{n-j}(x)$.

(c) Sei nun f eine gerade Funktion, d.h. $f(-x) = f(x)$ und $f_j := f(x_j)$.
Zeigen Sie, dass dann das Interpolationspolynom ebenfalls gerade ist.

Aufgabe 11.2. (3 Punkte)

Das Hermite-Interpolationspolynom $H_n(x)$ vom Grad $2n+1$ im Intervall $[a, b]$ zu den Interpolationsbedingungen

$$H_n(x_i) = f(x_i) \text{ und } H_n^{'}(x_i) = f^{'}(x_i)$$

für $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ lässt sich schreiben als

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [1 - 2L_i^{'}(x_i)(x - x_i)] L_i^2(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} (x - x_i) L_i^2(x) f^{'}(x_i),$$

wobei $L_i(x)$ die Lagrange-Polynome vom Grad n sind. Beweisen Sie diese Darstellung.

Aufgabe 11.3. (4 Punkte)

Sei $\tilde{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{f}(t) = \pi - |\pi - t|$ und f die 2π-periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Das Intervall $[0, 2\pi]$ sei äquidistant diskretisiert mit Schrittweite $h = \frac{2\pi}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien $f_j = f(t_j)$ die Funktionswerte an den Stützstellen $t_j = \frac{2\pi}{n} j$ für $j = 0, \ldots, n$.
Gemäß der Vorlesung nimmt das reelle trigonometrische Interpolationspolynom vom Grad m die folgende Gestalt an:

$$g_m(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{m} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\},$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j \cos(2\pi kj/n) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\cos(k \cdot t_j), \\ b_k &:= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j \sin(2\pi kj/n) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\sin(k \cdot t_j) \end{aligned}$$

Bereits ein kurzer scharfer Blick auf die Darstellung der Koeffizienten gibt Anlass zur Vermutung, dass die a_k bzw. b_k Nährungen an die Integrale

$$a_k^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \quad \text{und} \quad b_k^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

darstellen. (Tatsächlich wurde hier die Ihnen aus Analysis 1 oder der Schulzeit bekannte Trapezregel zur äquidistanten Schrittweite $h = \frac{2\pi}{n}$ angewendet. Dazu allerdings mehr im nächsten Kapitel zur Vorlesung.)
Sei nun g_m^* analog zu g_m definiert durch

$$g_m^*(t) = \frac{1}{2}a_0^* + \sum_{k=1}^{m} \{a_k^* \cos(kt) + b_k^* \sin(kt)\}.$$

Berechnen Sie a_k^* und b_k^* für $k \in \{0, \ldots, m\}$ und geben Sie g_m^* an.

Bemerkung 1: Da sowohl die Basisfunktionen $\cos(kt)$ und $\sin(kt)$, als auch die zu approximierende Funktion f 2π-periodisch ist, erhält man durch g_m^* eine Nährung an f auf ganz $\mathbb{R}$, obwohl man nur auf $[0, 2\pi]$ gerechnet hat.

Bemerkung 2: Die a_k und b_k heißen *Fourierkoeffizienten* der 2π-periodischen Funktion f, g_m^* das *Fourierpolynom vom Grad m.*

Aufgabe 11.4. (2 + 4 = 6 Punkte)

(a) Sei S der Raum der natürlichen kubischen Splinefunktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Geben Sie an, welche der folgenden Funktionen in S liegen und begründen Sie Ihre Antwort.

   i) $s_1(x) = x^3 - x^2$
   ii) $s_2(x) = (\max\{0, x - 1\})^3 - \frac{1}{2}x^3$

(b) Berechnen Sie den natürlichen kubischen Spline, der folgende Tabelle interpoliert.

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	0	$-\frac{5}{2}$	-4	$-\frac{5}{2}$	0