So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.
Ernst Mach (1838-1916, böhmischer Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

12. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 14.07.2015 vor der Vorlesung.

Aufgabe 12.1. (4 + (1.5 + 1.5) = 7 Punkte)

(a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bestimmen sie die Gewichte $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{R}$ und die Stelle $z \in [a, b]$ so, dass

$$S(f) = \omega_0 f(a) + \omega_1 f(z)$$

für alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist.

Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil gegenüber der Trapezregel.

Hinweis: Die Transformation des Intervalls $[a, b]$ auf das Intervall $[0, 1]$ erleichtert die Bestimmung der Gewichte ω_0 und ω_1. Rücktransformation nicht vergessen!

(b) Integrieren Sie nährungsweise

$$\int_{-1}^{2} 2x^3 dx$$

(i) mit der Formel aus (a)
(ii) mit der Trapezregel

und geben Sie jeweils den absoluten Fehler an.

Aufgabe 12.2. (3 + 2 = 5 Punkte)

Zur Berechnung von π betrachten wir $\pi = 4 \cdot \arctan(1) = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

(a) Berechnen Sie T_h, d.h. die zusammengesetzte Trapezregel, angewandt auf den obigen Integranden zu den Schrittweiten $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

(b) Benutzen Sie das Schema von Neville, um T_0 (d.h. $x = 0$) zu extrapolieren, d.h. die Stützwerte sind $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{3}$ und $x_3 = \frac{1}{4}$ und $f_1 = T_{\frac{1}{2}},\ f_2 = T_{\frac{1}{3}}$ und $f_3 = T_{\frac{1}{4}}$.
Welche Nährung an π erhalten Sie?

Aufgabe 12.3. (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Mit der n-ten Newton-Cotes-Formel

$$I_n(f) := (b - a) \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

lassen sich Polynome vom Grad n exakt integrieren.

(b) Welcher Bedingung muss n genügen, damit für äquidistante Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ die Funktion $\omega(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$ punktsymmetrisch zur Intervallmitte ist?

(c) Wann ist für $n \in \mathbb{N}$ und äquidistante Zerlegungen die n-te Newton-Cotes-Formel auch für Polynome p vom Grad $n + 1$ exakt?