“Sie müssen ihr Talent entdecken und benutzen. Sie müssen herausfinden, wo ihre Stärke liegt. Haben Sie den Mut, mit ihrem Kopf zu denken. Das wird ihr Selbstvertrauen und ihre Kräfte verdoppeln.” - Zu ihren Schülern und Mitarbeitern
Marie Curie
(1867-1934, polnisch-französische Chemikerin und Physikerin)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

2. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Wegen des Feiertags verlängert sich der Abgabetermin auf
Freitag, den 06.05.2016, 12:00 Uhr.
Außerdem wird Blatt 3 deswegen nur online erhältlich sein.

Aufgabe 2.1. (2 + 2 = 4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen sie die Lösung x des Gleichungssystems $Ax = (1, -8, -16, -12)^\top$ mit Hilfe der LR-Zerlegung.

Aufgabe 2.2. ((1 + 1) + (1 + 1 + 1) = 5 Punkte)

Tridiagonale Matrizen sind in der Regel quadratische Matrizen bei denen lediglich die Haupt- und die beiden Nebendiagonalen von Null verschiedene Einträge aufweisen. Entsprechend sind bei *bidiagonalen Matrizen* nur eine Haupt- und eine der Nebendiagonalen besetzt.
Gegeben sei nun eine Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Nehmen Sie an der Gauß-Algorithmus sei ohne Pivotsuche durchführbar und die Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ der LR-Zerlegung wären Bidiagonalmatrizen.

(a) i) Verwenden Sie für $n = 5$ den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & a_2 & b_3 & c_3 & \\ & & a_3 & b_4 & c_4 \\ & & & a_4 & b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_1 & 1 & & & \\ & l_2 & 1 & & \\ & & l_3 & 1 & \\ & & & l_4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & r_1 & & & \\ & d_2 & r_2 & & \\ & & d_3 & r_3 & \\ & & & d_4 & r_4 \\ & & & & d_5 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

und bestimmen Sie die L_i, d_i und r_i durch Koeffizientenvergleich.

ii) Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den Pseudocode zur Berechnung der l_i, d_i und r_i an.

(b) Betrachten Sie nun das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wie oben angegeben. Die rechte Seite $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ sei gegeben und $x \in \mathbb{R}^n$ die gesuchte Größe.

i) Geben Sie den Pseudocode zur Berechnung von $\mathbf{z}$ mit $\mathbf{Lz} = \mathbf{f}$ an (Vorwärtseinsetzen).

ii) Geben Sie den Pseudocode zur Berechnung von $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{Rx} = \mathbf{z}$ an (Rückwärtseinsetzen).

iii) Geben Sie jeweils die Anzahl an vorhandenen Operationen $\in \{\cdot, /\}$ in den Pseudocodes (auch in a) ii)) an. Wie viele Operationen sind somit insgesamt nötig?

Aufgabe 2.3. (2 + (1.5 + 1.5) = 5 Punkte)
Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) wird *Matrixnorm* genannt, wenn sie die üblichen Normeigenschaften besitzt.

(a) Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ eine beliebige Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, dass durch

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} \; : \; \|A\| = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Ax\|_{\mathbb{K}^m}}{\|x\|_{\mathbb{K}^n}} \right) = \sup_{\|x\|_{\mathbb{K}^n}=1} (\|Ax\|_{\mathbb{K}^m})$$

stets eine Matrixnorm, die *der Vektornorm* $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ *zugeordnete Matrixnorm*, definiert wird und dass für quadratische Matrizen jede zugeordnete Matrixnorm *submultiplikativ* ist, d.h.

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n} \; : \; \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \,.$$

(b) Bestimmen Sie die zu den folgenden Vektornormen zugeordneten Matrixnormen:

(a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

(b) $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|)$.

Aufgabe 2.4. (Programmieraufgabe, 2.5 + 2.5 + 2.5 = 7.5 Punkte)
In dieser Aufgabe soll die LR-Zerlegung für streng reguläre Matrizen implementiert und anschließend ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$ gelöst werden. Auf der Internetseite der Veranstaltung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Auf der Kommandozeile kompilieren Sie Ihr Programm mit

```
gcc -Wall main.c LR.c basic_LinAlg.c -lm
```

(a) Betrachten Sie zunächst die Datei `LR.c` mit der zugehörigen Header-Datei `LR.h`. Schreiben Sie eine Funktion, die die LR-Zerlegung einer Matrix berechnet. Die ursprüngliche Matrix soll dabei durch L und R überschrieben werden, die Einsen auf der Diagonale von L werden nicht gespeichert, d.h. also, L und R stehen in *einer* Matrix! Schreiben Sie weiter Funktionen für die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

(b) Schreiben Sie nun in `main.c` ein Testprogramm, das diese Funktionen verwendet, um ein Gleichungssystem zu löst. Testen Sie es anhand des linearen Gleichungssystems aus Aufgabe 2.1 und geben Sie auf dem Bildschirm jeden Rechenschritt aus, also die kombinierte Matrix mit L und R, den Vektor Rx sowie die Lösung x.

(c) Ergänzen Sie Ihr Programm so, dass zur Probe Ax berechnet wird und mit der gegebenen rechten Seite b des Gleichungssystems verglichen werden kann. *Hinweis: Da die Matrix A mit L und R überschrieben wird, müssen Sie eine Kopie von A anlegen oder die Matrix nochmals einlesen.*

Wichtige Informationen und Hilfestellungen zu den Programmieraufgaben finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung ebenso wie die Bibliothek `basic_LinAlg.c`, die Sie für ihr Programm verwenden dürfen. Die Bibliothek enthält grundlegende Operationen und nützliche Funktionen.
Schicken Sie ihr Programm bzw. zugehörige Plots bis spätestens 06.05.2016 per Mail an ihre(n) Übungsleiter(in). Vergessen Sie nicht Ihre Namen in die Email zu schreiben.