Math is like Ophelia in Hamlet - charming and a bit mad.
Alfred North Whitehead
(1861-1947, britischer Philosoph und Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

4. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 19.05.2015 vor der Vorlesung.

Aufgabe 4.1. (2 + 2 = 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jede unitäre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Dreiecksgestalt diagonal ist mit Diagonalelementen ± 1.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, so wird die QR-Zerlegung von A durch die zusätzliche Bedingung $r_{ii} > 0 \ \forall\ i \in \{1, \dots, n\}$ eindeutig.

Aufgabe 4.2. (0.5 + (3.5 + 1 + 1.5) + 1 = 7.5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 5 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Begründen Sie, warum A nur reelle Eigenwerte hat.

(b) i) Beweisen Sie den *Satz von Gerschgorin (Kreissatz):*
Sei $A = (a_{ij})_{i=1}^n$ eine $n \times n$-Matrix. Dann liegen alle Eigenwerte der Matrix in der Menge

$$M = \bigcup_{i=1}^n K_i, \text{ wobei } K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}| \right\}, i = 1, \dots, n.$$

Hinweis: Es gilt für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und jeden Eigenwert λ von A, wenn er nicht auch Eigenwert von B ist:

$$1 \le \left\| (\lambda I - B)^{-1}(A - B) \right\| \le \left\| (\lambda I - B)^{-1} \right\| \|A - B\|$$

mit einer Matrixnorm $\|\cdot\|$.

ii) Geben Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gerschgorin die Intervalle an, in deren Vereinigung die Eigenwerte von A liegen. Wieso kann nicht gefolgert werden, dass A positiv definit ist?

iii) Schätzen Sie mit Hilfe des Kreissatzes von Gerschgorin möglichst genau die Lage der Eigenwerte von $\tilde{A} := D^{-1}AD$ ab, wobei $D := \mathrm{diag}(0.5, 0.5, 1)$ eine Diagonalmatrix ist. Können Sie hieraus die positive Definitheit von A folgern? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Schätzen Sie Anhand der Informationen aus b) die Konditionszahl $\kappa(A)$ bzgl. der Spektralnorm möglichst genau nach oben ab.

Aufgabe 4.3. (2.5 + 1 + 2 = 5.5 Punkte)

(a) Die hermitesche $n \times n$-Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ und $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ die Abschätzung

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda - \lambda_i| \leq \frac{\| Ax - \lambda x \|_2}{\| x \|_2}$$

Hinweis: Spektraldarstellung

(b) Zeigen Sie: Ist $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, so gibt es zu jedem Diagonalelement a_{ii} einen Eigenwert λ von A, welcher der Ungleichung

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

genügt.

(c) Zeigen Sie mit $x = (1, 1, 1)^\top$ und der Aussage in Teil a), dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

einen Eigenwert im Intervall $[12, 13]$ besitzt.