Im Leben ist es von A nach B manchmal doppelt so weit wie von B nach A.
Erwin Chargraff
(1905-2002, österreichisch-amerikanischer Biochemiker und Schrifsteller)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

5. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Wegen des Feiertags verlängert sich der Abgabetermin auf
Freitag, den 02.06.2015, 12:00 Uhr.
Außerdem wird Blatt 6 deswegen nur online erhältlich sein.

Aufgabe 5.1. (5 Punkte)
Lösen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung nach dem Householder-Verfahren das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Geben Sie alle Rechenschritte, sowie die Matrizen Q und R explizit an.

Aufgabe 5.2. (5 Punkte)
Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 15 & 39 & 33 \\ 0 & 40 & -45 \\ -20 & -2 & 56 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Givens-Rotationen. Geben Sie alle Rechenschritte, sowie die Matrizen Q und R explizit an.

Aufgabe 5.3. (1.5 + 2.5 = 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass durch Linksmultiplikation mit einer geeigneten regulären Diagonalmatrix jede reguläre Matrix in eine zeilenäquilibrierte mit Zeilensumme 1 transfomiert werden kann, d.h. mit Hilfe einer regulären Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann durch Übergang von $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$, zu
$$\tilde{A}x = \tilde{b}$$
mit $DA = \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ und $\tilde{b} = Db$ erreicht werden, dass
$$\sum_{j=1}^{n} |\tilde{a}_{ij}| = 1,\ 1 \le i \le n$$
ist. $\tilde{A}$ heißt *Äquilibrierung* von A.

(b) Zeigen Sie:
$$\kappa_\infty(\tilde{A}) \le \kappa_\infty(D\tilde{A})$$
für jede reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times}$.

Bemerkung: Im Spezialfall $D = D^{-1}$ folgt $\kappa_\infty(\tilde{A}) \le \kappa_\infty(A)$, d.h. Äquilibrierung verbessert die Kondition.

Aufgabe 5.4. (Programmieraufgabe, 3.5 + 3.5 = 7 Punkte)

In dieser Aufgabe soll mit Hilfe des Householder-Verfahrens die QR-Zerlegung einer Matrix A berechnet und anschließend ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$ gelöst werden. Auf der Internetseite der Veranstaltung finden Sie ein Grundgerüst für Ihr Programm. Auf der Kommandozeile kompilieren Sie Ihr Programm mit

```
gcc -Wall main.c QR.c basic_LinAlg.c -lm
```

Um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, können Sie die Rückwärtssubstitution vom zweiten Übungsblatt wiederverwenden.

(a) Betrachten Sie nun die Datei `QR.c` mit der zugehörigen Header-Datei `QR.h`. Schreiben Sie eine Funktion, die mit Hilfe des Householder-Verfahrens die Matrix R aus einer Matrix A berechnet. Überschreiben Sie dabei den entsprechenden Teil der Matrix und geben Sie die aus R und den u_i kombinierte Matrix aus, sowie den Vektor u mit den Elementen $u_i^{(i)}$. Schreiben Sie weiter Funktionen für die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Geben Sie auch hier die Zwischenlösungen aus.

(b) Schreiben Sie nun in `main.c` ein Testprogramm, das diese Funktionen verwendet, um ein Gleichungssystem zu lösen. Testen Sie es anhand des folgenden linearen Gleichungssystems

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Lösung ist

$$R = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & -\frac{20}{3} \\ 0 & -3 & 3 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$