Ich stimme mit der Mathematik nicht überein. Ich meine, dass die Summe von Nullen eine gefährliche Zahl ist.
Stanislaw Jerzy Lec
(1909-1966, polnischer Satiriker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

6. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 02.06.2016 vor der Vorlesung.

Aufgabe 6.1. (2 + 2 = 4 Punkte)

(a) Es bezeichne $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Iterationsmatrix des Einschrittverfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Sei λ ein Eigenwert von C und $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Zeigen Sie, dass für $i \in \{1, \dots, n\}$ folgende Identität gilt:

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j.$$

(b) Für A gelte das starke Zeilensummenkriterium, d.h. es ist

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Beweisen Sie die Konvergenz des Einschrittverfahrens.

Hinweis: Betrachten Sie einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ für den ohne Einschränkung $\| v \|_\infty = |v_k|$ gilt für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ und schätzen Sie

$$|\lambda||v_k| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

nach oben ab.

Aufgabe 6.2. (1.5 + 1 + 0.5 + 3 = 6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix A eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(a) Geben Sie jeweils für das Richardson- und das Gauß-Seidel-Verfahren die Iterationsmatrix an.

(b) Treffen Sie jeweils Aussagen bezüglich der Konvergenz der Verfahren.

(c) Welches Verfahren konvergiert am schnellsten?

(d) Durch Einführung eins Parameters $\omega > 0$ und der Verwendung von $\frac{1}{\omega}B$ statt B gemäß der Vorlesung, soll die Konvergenzgeschwindigkeit des Gauß-Seidel-Verfahrens erhöht werden. Wählen Sie also für die Iterationsmatrix C den Ansatz

$$C = \omega B^{-1}\left(\frac{1}{\omega}B - A\right) = I - \omega B^{-1}A$$

und bestimmen Sie das optimale ω.
Hinweis: Skizzieren Sie die Beträge der Eigenwerte $|\lambda_1| = |\lambda_1(\omega)|$ und $|\lambda_2| = |\lambda_2(\omega)|$ von C in Abhängigkeit von ω im selben Koordinatensystem.

Aufgabe 6.3. (Programmieraufgabe, Jacobi, Gauß-Seidel und Relaxationsverfahren, 2 + 2 + 4 + 2 = 10 Punkte)

Wir betrachten wie in der Vorlesung das Einschrittverfahren in der kanonischen Form

$$B\frac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau}+Ax^{(k)}=b,\quad k=0,1,\ldots$$

mit gegebenem $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$, wobei $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Hierbei sei $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})^\top$ und $A=L+D+R$ mit einer Diagonalmatrix D, $d_{ii}\neq 0$ und einer strikten unteren und oberen Dreiecksmatrix L und R.

(a) Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren ($B=D$, $\tau=1$) komponentenweise wie folgt geschrieben werden kann:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right),\quad i=1,2,\ldots,n$$

für $k=0,1,2,\ldots$.

(b) Zeigen Sie, dass das Relaxations-Verfahren ($B=D+\omega L$, $\tau=\omega$) bzw. das Gauß-Seidel-Verfahren ($\omega=1$) komponentenweise wie folgt geschrieben werden kann:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)}-\frac{\omega}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right),\quad i=1,2,\ldots,n$$

für $k=0,1,2,\ldots$.

(c) Implementieren Sie die Formeln für das Jacobi- und das Relaxations-Verfahren in den dafür vorgesehenen Dateien, die auf der Internetseite bereit stehen.

(d) Approximieren Sie die Lösung des lineare Gleichungssystem

$$Ax=b \qquad \text{mit}\quad A=\begin{pmatrix}7&3&-2&-1\\3&11&-3&4\\-2&-3&7&-1\\-1&4&-1&7\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-3\\-2\\12\\14\end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Jacobi-Verfahrens und dem Relaxations-Verfahren ($\omega=0.8$) indem Sie 20, 40 und 60 Iterationsschritte durchführen. Starten Sie mit $x^{(0)}=(0,0,0,0)^\top$. Geben Sie jeweils die Approximation $x^{(k)}$ und $Ax^{(k)}$ für $k=20,40,60$ aus. Die exakte Lösung lautet $x=(1,-1,2,3)^\top$. Was stellen Sie fest?

Hinweis: Starten Sie nach 20 Schritten neu und wählen $x^{(0)}=x^{(20)}$ so erhalten Sie nach weiteren 20 Schritten $x^{(40)}$.