

Strukturen sind die Waffen der Mathematiker.

Nicolas Bourbaki

(1934, französischer Mathematiker)



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

7. Übung zur Vorlesung Praktische Mathematik im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 09.06.2015 vor der Vorlesung.

Aufgabe 7.1. (2.5 + 2.5 = 5 Punkte)

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soll mit dem

- (a) Jacobi-Verfahren
- (b) Gauß-Seidel-Verfahren

gelöst werden.

- Wie viele Iterationen sind jeweils ungefähr erforderlich, um den Iterationsfehler $\|x^{(k)} - x\|_2$ um den Faktor 10^{-6} zu reduzieren?
- Welches Verfahren konvergiert also schneller?

Hinweis: Wählen Sie die Iterationsmatrix analog zum Verfahren der einfachen Iteration.

Aufgabe 7.2. (1 + 1.5 + 1.5 = 4 Punkte)

Das sogenannte Landweber-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$x^{m+1} = (I - \vartheta A)x^m + \vartheta b.$$

Sei $\vartheta \in \mathbb{R}$ und $M(\vartheta) := I - \vartheta A$.

Die Matrix A sei positiv definit mit kleinstem Eigenwert λ_{\min} und größtem Eigenwert λ_{\max} . Zeigen Sie

- (a) $\rho(M(\vartheta)) = \max\{|1 - \vartheta\lambda_{\min}|, |1 - \vartheta\lambda_{\max}|\}$
- (b) Das Landweber-Verfahren konvergiert genau dann, wenn $0 < \vartheta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ gilt.
- (c) Der Spektralradius von $M(\vartheta)$ wird minimal $\vartheta_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$.

-Bitte wenden-

Aufgabe 7.3. (Programmieraufgabe, Jacobi, Gauß-Seidel und Relaxationsverfahren zum Zweiten, 2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Wir greifen nochmals die letzte Programmieraufgabe auf und wollen die Iterationsverfahren etwas genauer untersuchen.

- (a) Schreiben Sie ein Programm, das die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, mit den Daten von der Internetseite, mit Hilfe des Jacobi-Verfahrens approximiert. Als Startvektor wählen Sie $x^{(0)} = b$. Starten Sie den Algorithmus mit $K = 50, 100, 150, \dots, 2000$ Iterationsschritte und schreiben Sie die Anzahl der Iterationen und den relativen Fehler

$$\frac{\|x^{(K)} - x\|}{\|x\|}$$

zeilenweise in eine Datei `fehler_jacobi.dat`, d.h. in der Form

# Anzahl der Iterationen	relativer Fehler
50	3.47831830e-01
100	1.31844875e-01
150	4.99758376e-02

- (b) Lösen Sie das Problem ebenfalls mit Hilfe des Relaxations-Verfahrens für $\omega = 0.2, 0.6, 1, 1.4, 1.8$ und erzeugen Sie die entsprechenden Dateien `fehler_sor_omega...dat`. Starten Sie auch hier immer der Fairness halber mit $x^{(0)} = b$.
- (c) Visualisieren Sie die erzeugten Daten mit Hilfe von Gnuplot. Tragen Sie hierzu die Daten aller Dateien in einem Koordinatensystem auf. Auf der x-Achse sollen die Iterationen und auf der y-Achse der relative Fehler aufgetragen werden. Skallieren Sie hierzu die y-Achse logarithmisch. Beschriften Sie die Achsen und geben Sie der Visualisierung einen Titel.
Hinweis: Auf der Internetseite der Veranstaltung finden Sie einige Hinweise zu Gnuplot.
- (d) Speichern Sie den erzeugten Konvergenzgraphen als Bild ab und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. Geben Sie das Bild und die Diskussion zusammen mit Ihrem Übungsblatt ab.