Er ist Mathematiker, also hartnäckig.
Johann Wolfgang von Goethe (1749 - 1832),
deutscher Dichter

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L. Huwig, M.Sc.

9. Übung zur Vorlesung
Praktische Mathematik
im Sommersemester 2016

Abgabe: Donnerstag, den 23.06.2015 <u>vor</u> der Vorlesung.

Aufgabe 9.1. (1 + 1 + 3 = 5 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels der inversen Vektoriteration

$$Ax^{(k+1)} = x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

soll ein Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von A berechnet werden. Zeigen Sie:

(a) $x^{(k)} = (A^{-1})^k x^{(0)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$,

(b) für alle $k \in \{1, 2, \dots\}$ gilt

$$(A^{-1})^k = \frac{1}{2^k} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2^k \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie

$$\begin{aligned} \overline{x}^{(1)} &:= \lim_{k\to\infty} x^{(k)}, \quad \text{wenn } x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overline{x}^{(2)} &:= \lim_{k\to\infty} x^{(k)}, \quad \text{wenn } x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Erklären Sie das Phänomen bzgl. der Konvergenz des Verfahrens in Abhängigkeit der Wahl von $x^{(0)}$. Betrachten Sie dazu die Eigenvektoren der Matrix A.

Aufgabe 9.2. (3 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ regulär}$$

mit $c \neq 0$.
Zur Bestimmung der Eigenwerte von A wird der QR-Algorithmus angewandt:

$$\begin{aligned} A_0 &:= A \\ A_k &= Q_{k+1}R_{k+1} \qquad (QR\text{-Zerlegung von } A_k) \\ A_{k+1} &:= R_{k+1}Q_{k+1} \end{aligned}$$

für $k \geq 0$.
Zeigen Sie, dass der QR-Algorithmus **nicht** nach endich vielen Iterationsschritten eine obere Dreiecksmatrix A_{k^*} erzeugt und damit abbricht.

Aufgabe 9.3. (3 + 1 = 4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2} & \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0$$

(b) Geben Sie die Konditionszahl der Matrix A $\kappa_2(A)$ an.

Aufgabe 9.4. (Programmieraufgabe, Berechnung von Eigenwerten, 3 + 3 + 2 = 8 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Eigenwerte numerisch berechnet werden. Hierzu wird die Potenzmethode sowie der klassische QR-Algorithmus implementiert. Wir betrachten die kleine Matrix

$$A_{\text{klein}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $(6, 4, 4, 2)$ sowie die entsprechende Matrix $A \in \mathbb{R}^{255\times 255}$ vom 7. Übungsblatt.

(a) Schreiben Sie ein Hauptprogramm, das die Potenzmethode mit direkter Iteration realisiert um den größten Eigenwert von A_{klein} zu brechnen. Implementieren Sie anschließend die Potenzmethode mit inversen Iterationen um den kleinsten Eigenwert zu berechnen (*Hinweis: Benutzen Sie die LR-Zerlegung*). Als Startvektor verwenden Sie stets $(1, 0, \ldots, 0)^\top$. Führen Sie hierbei $K = 20$ Iterationsschritte durch und geben Sie abschließend den kleinsten sowie den größten Eigenwert und die Kondition der Matrix aus.

Schreiben Sie zusätzlich die die Approximationen für den kleinsten und größten Eigenwert zu jedem Iterationsschritt in eine Datei und visualisieren Sie diese mit Hilfe von `gnuplot`.

(b) Als nächstes wollen wir alle Eigenwerte der Matrix A_{klein} berechnen. Schreiben Sie hierzu ein Hauptprogramm zum klassischen QR-Algorithmus und führen sie ebenfalls $K = 20$ Iterationen durch, wobei sie jeweils die Matrizen A_k ausgeben. Geben Sie abschließend den kleinsten sowie den größten Eigenwert und die Kondition der Matrix aus.

Hinweis: Sie können die Methode `QR_HS_Zerlegung()` vom 5. Übungsblatt verwenden. Die wesentliche Aufgabe besteht darin eine Funktion `QR_HS_Transformation()` zu schreiben, die für $A = QR$ die Multiplikation RQ ausführt. Hierbei ist $Q = Q_1 \cdots Q_{n-1}$ und Q_i sind die Householder Spiegelungen.

(c) Wenden Sie nun beide Verfahren auf die Matrix $A \in \mathbb{R}^{255\times 255}$ mit $K = 200$ Iterationsschritten an. (Die Ausgabe von Zwischenergebnissen kann auskommentiert werden.) Wie groß ist die Kondition von A und in wie fern kann hiermit das Konvergenzverhalten der Methode der einfachen Iteration und des cg-Verfahrens erklärt werden?