UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
L.Huwig, M.Sc.

Probeklausur zur Vorlesung

Praktische Mathematik

im Sommersemester 2016

Ohne Abgabe, Besprechung am Dienstag, den 26.07.2016 statt der Vorlesung

Aufgabe 1. (ohne Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ist offensichtlich nicht streng regulär und die Gauß-Elimination ohne Pivotsuche scheitert. Bestimmen Sie also durch Spaltenpivotsuche eine Zerlegung $PA = LR$.
Berechnen Sie für $b = (-1, -5, 1, 2)^\top$ die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe 2. (ohne Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 & 4 \\ 3 & 11 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -8 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin, dass die Matrix A regulär ist.

(b) Ist die Matrix A auch streng regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. (ohne Punkte)

(a) Bestimmen Sie mit Hilf von Householder-Transformationen die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Givens-Rotationen eine QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Q, R und alle Householder- bzw. Givens-Matrizen explizit an.

Aufgabe 4. (ohne Punkte)
Durch einen Übertragungsfehler der Funktionswerte f_j hat sich in der folgenden Tabelle von Interpolationspaaren zur Bestimmung eines **quadratischen Polynoms** ein Fehler eingeschlichen.

x_j	-2	-1	0	1	2
f_j	22	5	0	-2	2

Es ist bekannt, dass **genau** ein Funktionswert falsch übermittelt wurde.
Formulieren Sie eine Strategie, um den fehlerhaften Wert herauszufinden und berichtigen Sie den entsprechenden Eintrag in der Tabelle.
Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass $(x_j, f_j) = (0, 0)$ richtig übermittelt wurde.

Aufgabe 5. (ohne Punkte)
Berechnen Sie diejenige kubische Splinefunktion $s: [0,2] \to \mathbb{R}$ mit natürlichen Randbedingungen zu den Knoten $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, die die Interpolationsbedingungen $s(0) = 1,\ s(1) = 2$ und $s(2) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 6. (ohne Punkte)
Betrachtet wird die Auswertung der Funktion

$$f \quad : \quad [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x}$$

(a) Berechnen Sie die relative Konditionszahl von f bzgl. der 1-Norm. Für welche x im Intervall $[0, 2\pi]$ ist die Auswertung der Funktion gut bzw. schlecht konditioniert?

(b) Die Funktionsauswertung von f erfolgt über den hier angegebenen Algorithmus. In jedem Schritt des Algorithmus entsteht ein Fehler $\epsilon_i,\ i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \sin(x)(1+\epsilon_1) \\ \tilde{b} &= \tilde{a}^2(1+\epsilon_2) \\ \tilde{c} &= \frac{\tilde{b}}{x}(1+\epsilon_3) \end{aligned}$$

Untersuchen Sie für $x > 0$ den Algorithmus auf seine Stabilität.

Hinweise:
zu (a) Verwenden Sie die Regel von l'Hospital
zu (b)

$$\begin{aligned} \epsilon_1\epsilon_2 &\approx 0 \\ \frac{1+\epsilon_1}{1+\epsilon_2} &\approx 1+\epsilon_1-\epsilon_2 \\ (1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) &\approx 1+\epsilon_1+\epsilon_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. (ohne Punkte)
Sei $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ und $N \in \mathbb{N},\ N > 0$ gegeben und sei $x_k = -a + \frac{2ak}{N},\ k = 0, \ldots, N$ ein äquidistantes Gitter auf $[-a, a]$.
Welche der folgenden Funktionen wird durch die zusammengesetzte Trapezregel ($h = \frac{2a}{N}$)

$$S(f) = \frac{h}{2} f(x_0) + h \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{h}{2} f(x_N)$$

auf dem Intervall I exakt integriert?

(a) (i) $f(x) = 3x + 5$
(ii) $f(x) = x \exp(x^2)$

Begründen Sie ihre Antwort durch die **exakte** Berechnung des Interpolationsfehlers.

(b) $f(x) = (x - a)^2$
Widerlegen Sie durch Nachrechnen. Was passiert für $N \to \infty$?
Hinweise: $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{(N)(N+1)(2N+1)}{6}$

Aufgabe 8. (ohne Punkte)
Berechnen Sie mittels Gauß-Quadratur den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x-\pi)(x+\frac{1}{2}\sqrt{2})}{e^{x^2}}\, dx$$

Noch ein paar Infos und Tipps zur Klausur:

- Der Umfang der Probeklausur ist etwas größer als der der eigentlichen Klausur. Die Klausur ist so angelegt, dass nicht alle Aufgaben gelöst werden müssen. Das heißt die Klausur ist so bepunktet, dass auch für die Note 1.0 nicht alle Aufgaben vollständig bearbeitet werden müssen.
- Lesen Sie sich zuerst ALLE Aufgaben sorgfältig durch und beginnen Sie mit der Aufgabe, bei der Sie sich am sichersten fühlen. Bearbeiten Sie nach diesem Schema die Klausur.
- Sollten Sie sich bei einer Aufgabe zu lange aufhalten und nicht mehr weiter kommen, bearbeiten Sie die nächste Aufgabe und kommen Sie zu einem späteren Zeitpunkt wieder auf die Aufgabe zurück.
- Achten Sie bei der Anfertigung ihrer handbeschriebenen Blätter auf Abschreibfehler und notieren Sie sich nur die wichtigsten Formeln, Verfahren und die zentralen Inhalte der Vorlesung.