Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.
Galileo Galilei

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Andreas Buchheit

3. Übung zur Vorlesung

Programmierung

im Sommersemester 2019

Abgabe: Mittwoch, den 01.05.2019 bis spätestens 12 Uhr.

Aufgabe 3.1. (4 Punkte) Control Flow Basics
Diese Aufgabe dient dazu, den Einsatz von Kontrollstrukturen zu üben.

(a) Schreiben Sie ein Programm, das eine natürliche Zahl $n > 1$ aus Kommandozeileninput einliest und die Summe aller ungeraden Zahlen kleiner gleich n ausgibt.

(b) Lesen Sie mit scanf einen ANSI-String aus dem Kommandozeileninput ein und speichern Sie ihn in einem char Array. Formatieren Sie ihn neu, indem Sie alle Kleinbuchstaben durch Großbuchstaben ersetzen, aber alle weiteren chars unverändert lassen. Geben Sie daraufhin den neu formatierten String wieder aus.

Aufgabe 3.2. (6 Punkte) Trapezregel
Im Folgenden sollen Sie Funktionen numerisch mithilfe ihrer Taylorreihe approximieren und dann mittels der Trapezregel numerisch integrieren.

(a) Schreiben Sie ein Programm, das eine beliebige reelle Fließkommazahl x einliest und die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ausgibt. Verwenden Sie die Taylorreihe beider Funktionen. Nutzen Sie des Weiteren die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen (Symmetrie, etc.), um die Auswertung der Taylorreihe auf das Interval $[0, \pi/2]$ beschränken zu können. Brechen Sie die Reihe jeweils nach der achten Ordnung ab.

(b) Ein bestimmtes Integral der Form

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

kann numerisch mithilfe der Trapezregel integriert werden. Hierzu wird das Intervall $[a, b]$ zunächst in n Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, diskretisiert. Hierbei gilt

$$x_i = x_0 + i\Delta, \quad \Delta = (b - a)/n. \tag{2}$$

Die Approximation des Integrals ist dann gegeben durch

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta, \tag{3}$$

und für glatte Funktionen f gilt $I_n \to I$, für $n \to \infty$. Verwenden Sie die von Ihnen in Aufgabenteil (a) definierten Routinen zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen und berechnen Sie das Integral

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\big(x \sin(\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi \tag{4}$$

mithilfe der Trapezregel. Geben Sie eine Wertetabelle im Bereich von $x \in (0, 10]$ aus. Einen Bonuspunkt gibt es für das Plotten Ihrer Wertetabelle!

Aufgabe 3.3. (6 Punkte) Ein Exkurs in die Zahlentheorie
Der Einsatz von Numerik beschränkt sich nicht nur auf die angewandte Mathematik. Auch in anderen Teilbereichen, wie z.B. in der Zahlentheorie können numerische Verfahren genutzt werden, zum Beispiel um mathematische Thesen zu widerlegen, oder numerische Evidenz für deren Korrektheit zu schaffen.

(a) In der Vorlesung wurde die (unbewiesene) Collatz Vermutung eingeführt. Diese besagt, dass für alle Zahlen $n_0 \in \mathbb{N}$ die Folge, die durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} n_{j+1} &= n_j/2, \quad n_j \text{ gerade} \\ n_{j+1} &= 3n_j + 1, \quad n_j \text{ ungerade} \end{aligned} \tag{5}$$

definiert wird, die Zahl 1 erreicht. Das bedeutet es existiert ein Index $j > 0$, so dass $n_j = 1$. Die kleinste Zahl j, die diese Bedingung erfüllt wird Pfadlänge genannt.

Beweisen Sie numerisch, dass die Vermutung für alle Zahlen $n_0 \leq 10^9$ gilt. Erweitern Sie hierzu das Programm aus der Vorlesung entsprechend. Bestimmen Sie die Zahl $n \leq 10^9$, die die größte Pfadlänge aufweist und geben Sie n, sowie die entsprechende Pfadlänge aus.

(b) Schreiben Sie ein Programm, das folgende Behauptung numerisch für alle natürlichen Zahlen d kleiner gleich dem Makro D_MAX überprüft.

Die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^k = d^k, \tag{6}$$

mit $c_j, d \in \mathbb{N} \geq 1$ besitzt keine Lösung für $k = 4$. Einen Bonuspunkt falls Sie mit Ihrem Programm die Behauptung widerlegen (aufwendig!).