UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovski

Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Inhalt

In der Prüfung muss man insgesamt drei der folgenden Themen ausführlich erklären. Die drei Themen werden zufällig ausgewählt. Das erste kommt aus den Bereich 1–13, das zweite aus 14–21 und das dritte aus 22–32.

1. Vektorwertige Funktionen. Äquivalente Definitionen für Stetigkeit.
2. Differenzierbare Funktionen. Ableitung, Jakobimatrix.
3. Kettenregel auf $\mathbb{R}^n$.
4. Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit.
5. Der Umkehrsatz mit ein paar Beispielen.
6. Der Satz über implizite Funktionen mit ein paar Beispielen.
7. Integrierbarkeit von beschränkten Funktionen auf einem Rechteck: Teilung P, $L(f, P)$, $U(f, P)$.
8. Mengen vom Maß Null, Mengen mit Inhalt Null.
9. Fast überall stetige Funktionen, Jordan-messbare Mengen.
10. Der Satz von Fubini mit Folgerungen.
11. Partition der Eins: das Theorem und ein Beispiel von C^∞-Funktion mit kompaktem Träger.
12. Integrierbarkeit von lokal beschränkten Funktionen auf offenen Mengen.
13. Variablensubstitution, der Satz von Sard, ein Beispiel.
14. k-Tensoren auf einem Vektorraum V, $\dim \mathcal{T}^k(V)$.
15. Alternierende k-Tensoren, $\mathrm{Alt}(T)$, Dachprodukt mit Eigenschaften.
16. Die Dimension und Basis von $\Omega^k(V)$. Die Orientierung und das Volumenelement in V.
17. Vektorfelder, k-Formen auf $\mathbb{R}^n$. Das Differential.
18. Pullback (f^*), $f^*(\mathrm{d}\mathbf{x}^i)$, $f^*(h \bigwedge_{i=1}^n \mathrm{d}\mathbf{x}^i)$.
19. Geschlossene, exakte Formen. Poincaré-Lemma.
20. Singulärer k-Wurfel, k-Kette. Der Randoperator.

21. Integration auf Ketten. Satz von Stokes (für Ketten).

22. Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$. Äquivalente Definitionen für Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

23. Isooberflächen und Mannigfaltigkeiten.

24. Mannigfaltigkeiten mit Rand: Definition und Beispiele.

25. Der Tangentialraum für eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Vektorfelder, k-Formen, Differential auf Mannigfaltigkeiten.

26. Orientierung von Mannigfaltigkeiten: Orientierungswahl, äußerer Normalenvektor auf dem Rand, induzierte Orientierung.

27. Der Normalenvektor für $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$.

28. Orientierungshaltende k-Würfel, Integration auf Mannigfaltigkeiten.

29. Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten mit Beweis.

30. Volumenelement auf k-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$. Beispiele für $k = 2$, $n = 3$.

31. Klassische Sätze in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$: Satz von Green, Satz von Gauß, Satz von Stokes.

32. Richtungsableitung auf Mannigfaltigkeiten. Der Gradient ∇^M, die Divergenz div_M, der Divergenzsatz auf Mannigfaltigkeiten für Vektorfelder.

Kontakt: `richards@num.uni-sb.de`