Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$) des folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + 6x_3 &= 4, \\ ax_1 + 4x_2 + ax_3 &= 1, \\ -2x_2 + 4x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Lösung. Wir schreiben das lineare Gleichungssystem zunächst in Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ a & 4 & a & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Wir führen nun den Gaußalgorithmus durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ a & 4 & a & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to 2II - aI} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & 8-a^2 & -4a & 2-4a \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{II \to II + aIII}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & 8-a^2-2a & 0 & 2-a \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & -(a-2)(a+4) & 0 & 2-a \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:
$a = -4$: Die zweite Zeile ist nicht lösbar, d.h. die Lösungsmenge ist leer.
$a = 2$: Wir erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I + III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - 5\lambda \\ -\frac{3}{2} + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

$a \neq 2$ und $a \neq -4$: Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 6 & 4 \\ 0 & -(a-2)(a+4) & 0 & 2-a \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to 2I - 3III} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2a+6 & 0 & -1 \\ 0 & (a+4) & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Damit gilt $x_2 = \frac{1}{a+4}$ und somit $x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2(a+4)}$ sowie $x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{a+3}{a+4}$. Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{a+3}{a+4} \\ \frac{1}{a+4} \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2(a+4)} \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2 (2+4+1=7 Punkte)**.**

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}.
Hinweis: Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung. (i) Wir entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 7 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (-2) \det \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + (-3) \det \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 7(-1) + 2(1) - 3(-2) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Damit ist A invertierbar.

(ii) Wir führen den Gaußalgorithmus auf beiden Seiten durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to 7III+3I]{II \to 7II+5I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to 3III+II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & 7 & 21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[II \to II+III]{I \to I+3III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & 0 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & 0 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I+2II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Damit gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt

$$x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ i & -3 & 1-i \\ 1 & 0 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(\lambda E_3 - B) &= \det \begin{pmatrix} \lambda-(2-i) & 0 & 0 \\ -i & \lambda+3 & -1+i \\ -1 & 0 & \lambda-(2+i) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-(2-i)) \det \begin{pmatrix} \lambda+3 & -1+i \\ 0 & \lambda-(2+i) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-(2-i))(\lambda+3)(\lambda-(2+i)), \end{aligned}$$

wobei wir nach der 1. Zeile entwickelt haben. Damit sind die Eigenwerte $2-i, -3$ und $2+i$.
Zu $2-i$: Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 5-i & -1+i \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - iIII} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-i & -3+i \\ -1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & \frac{-1+i}{5-i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & \frac{-3+2i}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} 2i \\ \frac{-3+2i}{13} \\ -1 \end{pmatrix}$.
Zu -3: Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -5+i & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1+i \\ -1 & 0 & -5-i \end{pmatrix} \xrightarrow{II \to II - iIII} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+6i \\ -1 & 0 & -5-i \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III + I}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Zu $2+i$: Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -i & 5+i & -1+i \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[II \to II - iIII]{I \to I + 2iIII} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5+i & -1+i \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1+i}{5+i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2+3i}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2+3i}{13} \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (3+4=7 Punkte)**.**
Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $z^2 + z(6-4i) + 9 = 12i$,

(ii) $z^4 + 8z^2 + 7 = 0$.

Lösung. (i) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$z^2 + z(6-4i) + (3-2i)^2 = -9 + 12i + (3-2i)^2 = -9 + 12i + 9 - 12i - 4 = -4$$

und damit zu

$$(z + (3-2i))^2 = -4.$$

Damit ergeben sich die zwei Lösungen

$$z_1 = 2i - (3-2i) = -3 + 4i \quad \text{und} \quad z_2 = -2i - (3-2i) = -3.$$

(ii) Wir benutzen die Substitution $u = z^2$, sodass

$$u^2 + 8u + 7 = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$u^2 + 8u + 4^2 = -7 + 4^2$$

und damit zu

$$(u+4)^2 = 9.$$

Damit erhalten wir die Lösungen

$$u_1 = 3 - 4 = -1 \quad \text{und} \quad u_2 = -3 - 4 = -7.$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$z_1 = i,\ z_2 = -i,\ z_3 = \sqrt{7}i \quad \text{und} \quad z_4 = -\sqrt{7}i.$$

Aufgabe 5 ((2+2)+1+(3+2)=10 Punkte)**.**

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^4+5k-7}{4k^4+4k^2+9}$.

(ii) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{k^k}?$$

Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (a) aus (i).

(iii) Bestimmen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(6^{-k}\left(2^k+9\right)\right)$.

Lösung. (i) (a) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da

$$\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{(k+1)!}{k!}\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{k+1}{k+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e} < 1$$

für $k \to \infty$.

(b) Die Reihe divergiert, da

$$\frac{3k^4+5k-7}{4k^4+4k^2+9} = \frac{k^4}{k^4}\frac{3+\frac{5}{k^3}-\frac{7}{k^4}}{4+\frac{4}{k^2}+\frac{9}{k^4}} = \frac{3+\frac{5}{k^3}-\frac{7}{k^4}}{4+\frac{4}{k^2}+\frac{9}{k^4}} \to \frac{3}{4} \neq 0$$

für $k \to \infty$. Damit ist das Trivialkriterium nicht erfüllt und die Reihe kann nicht konvergieren.

(ii) Da die Reihe in (i) (a) konvergiert, existiert nach dem Trivialkriterium der Grenzwert und ist gleich 0.

(iii) (a) Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+3)} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{3}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{k+3-k}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=4}^{N+3}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)\\ &= \frac{11}{18}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right) \to \frac{11}{18}\end{aligned}$$

für $N \to \infty$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left(6^{-k}\left(2^k+9\right)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k+9\left(\frac{1}{6}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k+9\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}}+9\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}+9\frac{6}{5} = \frac{123}{10}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte).
Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} (x-2)(x+2), & \text{für } x \in (-\infty, 0], \\ x\ln(x) - 4, & \text{für } x \in (0,1), \\ e^x, & \text{für } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitonsbereichs auf Stetigkeit.

Lösung. Außerhalb von 0 und 1 ist f stetig.
Zur Stetigkeit in 0: Es gilt

$$\lim_{x \uparrow 0} (x-2)(x+2) = -4 = f(0)$$

und

$$\lim_{x \downarrow 0} x\ln(x) - 4 = -4,$$

sodass f in 0 stetig ist.
Zur Stetigkeit in 2: Es gilt

$$\lim_{x \uparrow 1} x\ln(x) - 4 = -4 \neq f(1) = e,$$

sodass f nicht in 1 stetig ist.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.**
Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-(x-1)^2}.$$

Wo ist f streng monoton wachsend, wo streng monoton fallend?

Lösung. Die Ableitung berechnet sich für $x \in \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-(x-1)^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-(x-1)^2}(-2)(x-1) = e^{-(x-1)^2}\left(1 + (-2x+1)(x-1)\right) \\ &= e^{-(x-1)^2}\left(1 - 2x^2 + 2x + x - 1\right) = e^{-(x-1)^2} x\left(-2x+3\right). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von f' sind demnach 0 und $\frac{3}{2}$. Weiterhin gilt

$$f'(-1) < 0, \quad f'(1) > 0 \quad \text{und} \quad f'(2) < 0.$$

Damit besitzt f in 0 ein lokales Minimum und in $\frac{3}{2}$ ein lokales Maximum.
Auf $(-\infty, 0]$ und $[\frac{3}{2}, \infty)$ ist f monoton fallend, auf $[0, \frac{3}{2}]$ ist f monoton wachsend.

Aufgabe 8 (3+5=8 Punkte)**.**
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_0^9 x\sqrt{x+9}\ \mathrm{d}x$,

(ii) $\int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

Lösung. (i) Wir benutzen die Substitution $u(x) = x+9$, sodass $u'(x) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^9 x\sqrt{x+9}\ \mathrm{d}x &= \int_0^9 (u(x)-9)\sqrt{u(x)}u'(x)\mathrm{d}x = \int_9^{18} (t-9)\sqrt{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_9^{18} t^{\frac{3}{2}} - 9t^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 6t^{\frac{3}{2}}\right]_9^{18} \\ &= \frac{2}{5}18^{\frac{5}{2}} - 6\cdot 18^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{5}9^{\frac{5}{2}} - 6\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{5}(3\sqrt{2})^5 - 6\cdot(3\sqrt{2})^3 - \left(\frac{2}{5}3^5 - 6\cdot 3^3\right) \\ &= \frac{2}{5}3^5\cdot 4\cdot\sqrt{2} - 6\cdot 3^3\cdot 2\cdot\sqrt{2} - 3^3\left(\frac{18}{5} - 6\right) \\ &= \frac{3^3}{5}\left(72\sqrt{2} - 60\sqrt{2} + 12\right) \\ &= \frac{324}{5}\left(\sqrt{2}+1\right).\end{aligned}$$

(ii) Wir benutzen partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\ \mathrm{d}x &= \left[-e^{-x}\sin(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}\cos(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[-e^{-x}\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= e^{-\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

sodass durch umstellen

$$\int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$$

gilt.