Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$) des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_2 + ax_3 &= 1, \\ ax_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Lösung. Wir schreiben das lineare Gleichungssystem zunächst in Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Wir führen nun den Gaußalgorithmus durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to III - aII]{I \to I - 2II} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3-2a & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -1-a \end{array}\right).$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung:
$a = -1$: Wir erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\lambda \\ 1 + \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} ;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

$a = 1$: Die letzte Zeile ist nicht lösbar, d.h. die Lösungsmenge ist leer.
$a \neq -1$ und $a \neq 1$: Wir erhalten aus der letzten Zeile

$$x_3 = \frac{-1-a}{1-a^2} = -\frac{1}{1-a},$$

sodass mit der zweiten Zeile

$$x_2 = 1 - ax_3 = \frac{1}{1-a}$$

folgt. Mit der ersten Zeile ergibt sich schließlich

$$x_1 = \frac{1}{4}(-1 - (3-2a)x_3) = \frac{1}{4}\left(-1 + \frac{3-2a}{1-a}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2-a}{1-a}\right),$$

also gilt für die Lösungmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{2-a}{1-a}\right) \\ \frac{1}{1-a} \\ -\frac{1}{1-a} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2-a) \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2 (2+4+1=7 Punkte)**.**

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und folgern Sie, dass A invertierbar ist.

(ii) Bestimmen Sie A^{-1}.
Hinweis: Alle Einträge von A^{-1} sind ganzzahlig.

(iii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung. (i) Wir entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 5 \det \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 5(-5+4) - 4(-6+4) - (12-10) = -5 + 8 - 2 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Damit ist A invertierbar.

(ii) Wir führen den Gaußalgorithmus auf beiden Seiten durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III \to 5III - 2I]{II \to 5II - 6I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{III \to III - 2II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II \to II + 4III]{I \to I + III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \to I - 4II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Damit gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt

$$x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte).
Bestimmen Sie alle (komplexen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1+2i \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-2i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(\lambda E_3 - B) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 0 & -1-2i \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ -1+2i & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 4)\det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -1-2i \\ -1+2i & \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 4)\left((\lambda-5)(\lambda-1) - (-1-2i)(-1+2i)\right) \\ &= (\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 5 - 5\right) \\ &= (\lambda - 4)\lambda(\lambda - 6), \end{aligned}$$

wobei wir nach der 2. Zeile entwickelt haben. Damit sind die Eigenwerte $0, 4$ und 6.
Zu 0: Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1-2i \\ 0 & -4 & 0 \\ -1+2i & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to 5III - (-1+2i)III} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1-2i \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+2i}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} \frac{1+2i}{5} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Zu 4: Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1-2i \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+2i & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to III + (-1+2i)III} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1-2i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \to -8I + (-1-2i)III} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu 6: Mit dem Gaußalgorithmus erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-2i \\ 0 & 2 & 0 \\ -1+2i & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \to -III + (-1+2i)I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-2i \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Eigenvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} -1-2i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (3+4=7 Punkte).
Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $z^2 + z(8+2i) + 8i = -24$,

(ii) $z^4 + 2z^2 - 3 = 0$.

Lösung. (i) Die Gleichung ist äquivalent zu

$$z^2 + z(8+2i) + (4+i)^2 = -24 - 8i + (4+i)^2 = -24 - 8i + 16 + 8i - 1 = -9$$

und damit zu

$$(z + (4+i))^2 = -9.$$

Damit ergeben sich die zwei Lösungen

$$z_1 = 3i - (4+i) = -4 + 2i \quad \text{und} \quad z_2 = -3i - (4+i) = -4 - 4i.$$

(ii) Wir benutzen die Substitution $u = z^2$, sodass

$$u^2 + 2u - 3 = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$u^2 + 2u + 1^2 = 3 + 1^2$$

und damit zu

$$(u+1)^2 = 4.$$

Damit erhalten wir die Lösungen

$$u_1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{und} \quad u_2 = -2 - 1 = -3.$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = \sqrt{3}i \quad \text{und} \quad z_4 = -\sqrt{3}i.$$

Aufgabe 5 ((3+2)+(3+2)=10 Punkte)**.**

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+8}{4k^5+8k^2+2}$.

(ii) Bestimmen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$,
Hinweis: Beachten Sie den Startindex; Indexverschiebung.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(9^{-k}\left(2^k+4^{-k}\right)\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6^k}$.

Lösung. (i) (a) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da für alle $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \le 1 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

gilt, d.h. $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Sie konvergiert hingegen nicht absolut, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

für $\alpha < 1$, also insbesondere $\alpha = \frac{1}{2}$, nach der Vorlesung divergiert.

(b) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Majoranten-Kriterium, da

$$0 \le \frac{2k^3+8}{4k^5+8k^2+2} \le \frac{2k^3+8k^3}{4k^5} = \frac{5}{2}\frac{1}{k^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}^*$ gilt und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert.

(ii) (a) Sei $N \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{N+3}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right) \to \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

für $N \to \infty$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left(9^{-k}\left(2^k+4^{-k}\right)\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6^k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^k+\left(\frac{1}{36}\right)^k\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{36}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-\frac{2}{9}}+\frac{1}{1-\frac{1}{36}}+\frac{1}{1-\frac{1}{6}} \\
&= \frac{9}{7}+\frac{36}{35}+\frac{6}{5}=\frac{123}{35}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.**
Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{e^x-1}, & \text{für } x \in (-\infty, 0), \\ x^3+4x-5, & \text{für } x \in [0,1), \\ \ln(x), & \text{für } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

in jedem Punkt ihres Definitonsbereichs auf Stetigkeit.

Lösung. Außerhalb von 0 und 1 ist f stetig.
Zur Stetigkeit in 0: Es gilt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{x^2}{e^x-1} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{2x}{e^x} = 0 \neq -5 = f(0),$$

also ist f in 0 nicht stetig.
Zur Stetigkeit in 1: Es gilt

$$\lim_{x\uparrow 1} x^3+4x-5 = 0 = f(1) = \ln(1) = \lim_{x\downarrow 1} \ln(x),$$

sodass f in 1 stetig ist.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.**
Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(1 - e^{1-x^2}\right)^2.$$

Wo ist f streng monoton wachsend, wo streng monoton fallend?
Hinweis: Vorzeichentabelle.

Lösung. Die Ableitung berechnet sich für $x \in \mathbb{R}$ zu

$$f'(x) = 2\left(1 - e^{1-x^2}\right)\left(-e^{1-x^2}\right)(-2x) = 4xe^{1-x^2}\left(1 - e^{1-x^2}\right)$$

Die Nullstellen von f' sind demnach $-1, 0$ und 1. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -8e^{-3}\left(1 - e^{-3}\right) < 0 \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2e^{\frac{3}{4}}\left(1 - e^{\frac{3}{4}}\right) > 0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 2e^{\frac{3}{4}}\left(1 - e^{\frac{3}{4}}\right) < 0 \\ f'(-2) &= 8e^{-3}\left(1 - e^{-3}\right) > 0 \end{aligned}$$

Damit besitzt f in -1 ein lokales Minimum, in 0 ein lokales Maximum und in 1 ein lokales Minimum.
Auf $(-\infty, -1]$ und $[0, 1]$ ist f monoton fallend, auf $[-1, 0]$ und $[1, \infty)$ ist f monoton wachsend.

Aufgabe 8 (4+3+1=8 Punkte)**.**
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\ln(3)}}^{\frac{1}{\ln(2)}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x,$

(ii) $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x,$

(iii) $\displaystyle\int_0^0 \frac{\sin(x) + 2\cos(x)}{\cos(x) + 2\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$

Lösung. (i) Wir benutzen die Substitution $u(x) = -\frac{1}{x}$, sodass $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\ln(3)}}^{\frac{1}{\ln(2)}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{\ln(3)}}^{\frac{1}{\ln(2)}} u'(x) e^{u(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\ln(3)}^{-\ln(2)} e^t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[e^t\right]_{-\ln(3)}^{-\ln(2)} \\
&= e^{-\ln(2)} - e^{-\ln(3)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(ii) Wir benutzen partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}\left(e^3 - 1\right) \\
&= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

(iii) Da die Grenzen übereinstimmen, ist das Integral gleich 0.