Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $T : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $|T(h)| \leq M|h|$ für alle $h \in \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $x \notin A$. Zeigen Sie, dass es ein $d > 0$ gibt mit $|x - y| \geq d$ für alle $y \in A$.

(b) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es ein $d > 0$ gibt mit $|x - y| \geq d$ für alle $x \in B$ und $y \in A$.

(c) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A \subset \mathbb{R}^2$ und $B \subset \mathbb{R}^2$ an, die (b) nicht erfüllen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Zeigen Sie, dass es eine kompakte Menge D gibt mit $C \subset \mathring{D} \subset D \subset U$, wobei $\mathring{D}$ das Innere von D bezeichne.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $S = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\right\}$ und $g : S \mapsto \mathbb{R}$ mit

(i) $g(0,1) = g(1,0) = 0$, $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

(ii) $g(-x) = -g(x)$.

(a) Geben Sie ein Beispiel für g an.

Sei

$$f(x) = \begin{cases} |x| g\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen sie, dass

(b) f genau dann stetig in 0 ist, wenn g beschränkt ist.

(c) f genau dann auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist, wenn g stetig ist.

(d) f genau dann differenzierbar in 0, wenn $g(s) = 0 = const$.

Abgabetermin : Dienstag, 24.04.12 vor der Vorlesung.