Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien A und B schiefsymmetrische 3×3 Matrizen (i.e. $A^\top = -A$). Zeigen Sie, dass die Funktion $F(A, B) = AB - BA$ schiefsymmetrische Ergebnisse liefert. Zeigen Sie außerdem, dass $F : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^3$ differenziebar ist. Wie lautet die Ableitung von F?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in a und $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar in $(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_m(a))$. Definieren Sie eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)).$$

Zeigen Sie, dass

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j f(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_m(a)) D_i g_j(a).$$

(b) Finden Sie die partiellen Ableitungen für die Funktionen

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(g(x) k(y), g(x) + h(y)) \\ F(x, y, z) &= f(x^y, y^z, z^x). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}}, & \text{wenn } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{wenn } |x| \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ gibt, so dass $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 1$ für $x \geq \varepsilon$.

(c) Für $a \in \mathbb{R}^n$, sei $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{x^k - a^k}{\varepsilon}\right).$$

Zeigen Sie, dass $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie weiterhin, dass g auf dem Rechteck $B = \prod_{k=1}^n \left(a^k - \varepsilon, a^k + \varepsilon\right)$ positiv ist und $g = 0$, wenn $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$.

(d) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset A$ kompakt. Zeigen Sie, dass es eine nicht-negative Funktion $h \in C^\infty(A, \mathbb{R})$ gibt, so dass $h(x) > 0$ für $x \in C$. Zeigen Sie weiterhin, dass es eine geschlossene Menge $E \subset A$ gibt, so dass $h(x) = 0$ für $x \in A \setminus E$.

(e) Zeigen Sie, dass es eine Funktion h wie in (d) gibt mit der Zusatzeigenschaft $h(x) = 1$, wenn $x \in C$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und injektiv mit $\det f'(x) \neq 0$ für alle x. Zeigen Sie, dass $f(A)$ eine offene Menge ist, und dass $f^{-1} : f(A) \mapsto A$ stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie auch, dass $f(B)$ offen ist, falls $B \subset A$ eine offene Menge ist.

Abgabetermin : Mittwoch, 02.05.12 vor der Vorlesung.