Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $a_{ij} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $b_j : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots n$ differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft $\det\left(\{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}\right) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktionen $s_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots n$ so, dass der Vektor $(s_1(t), \ldots, s_n(t))$ das folgende Gleichungssystem löst

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, s_j(t) = b_i(t)\,,\ i = 1, \ldots n.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen s_i differenzierbar sind, und finden Sie die Ableitungen s_i'.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien f, g integrierbare, reell-wertige Funktionen auf einem Rechteck A.

(a) Zeigen Sie, dass

$$m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g) \text{ und } M_S(f) + M_S(g) \geq M_S(f+g)\,,$$

wobei S ein Teilrechteck aus einer Teilung P von A sei. Zeigen Sie außerdem, dass

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \text{ und } U(f,P) + U(g,P) \geq U(f+g,P)\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f+g$ integrierbar ist, und $\int_A f+g = \int_A f + \int_A g$.

(c) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ gilt $\int_A cf = c\int_A f$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : A \mapsto \mathbb{R}$ integrierbar, A ein Rechteck. Zeigen Sie, dass $|f|$ integrierbar ist und $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $f : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f\,(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \text{ und } y \notin \mathbb{Q}, \\ 1/q & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \text{ und } y = p/q \text{ in Normalform,} \end{cases}$$

wobei $\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen bezeichne. Die Normalform einer rationalen Zahl $y = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ ist die Darstellung von y mit kleinsten p, q. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

Abgabetermin : Dienstag, 08.05.12 vor der Vorlesung.