Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei A eine Jordan-meßbare Menge und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine kompakte Jordan-meßbare Menge $C \subset A$ gibt, so dass $\int_{A \setminus C} 1 < \varepsilon$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : A \mapsto \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, $A \subset \mathbb{R}^n$ sei hierbei ein Rechteck, $f \geq 0$ und $\int_A f = 0$. Zeigen Sie, dass die Menge $B = \{x \in A : f(x) > 0\}$ vom Maß Null ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : [a, b] \mapsto [0, \infty)$ integrierbar und $A_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$.
Zeigen Sie: A_f ist Jordan-meßbar und $\int_{A_f} 1 = \int_a^b f$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgenden drei linearen Funktionen $s_{\alpha,J}, h_{J,K}, p_{J,K} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

$$s_{\alpha,J}(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{wenn } i \neq J, \\ \alpha e_i & \text{wenn } i = J, \end{cases}$$

$$h_{J,K}(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{wenn } i \neq J, \\ e_i + e_K & \text{wenn } i = J, \end{cases}$$

$$p_{J,K}(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{wenn } i \neq J \text{ und } i \neq K, \\ e_K & \text{wenn } i = J, \\ e_J & \text{wenn } i = K, \end{cases}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $J, K \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass für ein Rechteck $U \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_{s_{\alpha,J}(U)} 1 = |\det s_{\alpha,J}| v(U),$$

$$\int_{h_{J,K}(U)} 1 = |\det h_{J,K}| v(U),$$

$$\int_{p_{J,K}(U)} 1 = |\det p_{J,K}| v(U).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{g(U)} 1 = |\det g| v\,(U)$$

wenn $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ linear ist.

Abgabetermin : Dienstag, 22.05.10 vor der Vorlesung.