Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $f : [a,b] \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b \int_a^y f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_x^b f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

(b) Es sei $F(x) = \int_x^1 \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und die Funktionen $D_{1,2}f = D_2(D_1 f)$ und $D_{2,1}f = D_1(D_2 f)$ seien stetig. Zeigen Sie, dass $D_{1,2}f = D_{2,1}f$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : (0,1) \mapsto [0,\infty)$ lokal beschränkt und stetig. Zeigen Sie, dass $\int_{(0,1)} f$ genau dann existiert, wenn $\lim_{h\to 0} \int_h^{1-h} f$ existiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir definieren $f : (0,\infty) \times (0,2\pi) \mapsto \mathbb{R}^2$ mit $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist und $\det f'(r,\theta) \neq 0$ für alle (r,θ). Wie sieht die Menge $f((0,\infty) \times (0,2\pi))$ aus?

(b) Finden Sie die Funktion $P = f^{-1}$ in der Form $P(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y))$. Berechnen Sie P'.

(c) Sei

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (r_1)^2 < x^2 + y^2 < (r_2)^2\,,\ x > 0 \text{ und } x\tan\theta_1 < y < x\tan\theta_2\right\},$$

wobei $0 < r_1 < r_2$ und $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$. Es sei $h : C \mapsto \mathbb{R}$ integrierbar und $h(x,y) = g(r(x,y), \theta(x,y))$, zeigen Sie, dass

$$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\,g(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

Es sei $B_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\right\}$, zeigen Sie, dass

$$\int_{B_R} h = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\, g\,(r,\theta)\, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r.$$

(d) Sei $C_R = [-R,R] \times [-R,R]$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \int_{C_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left(\int_R^R e^{-x^2} \mathrm{d}x\right)^2 \quad \text{und} \\ \int_{B_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \pi\left(1 - e^{-R^2}\right). \end{aligned}$$

(e) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

und deswegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Abgabetermin : Dienstag, 29.05.12 vor der Vorlesung.