Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei T ein inneres Produkt auf V und die lineare Funktion $f : V \mapsto V$ erfülle $T(x, f(y)) = T(f(x), y)$ für alle $x, y \in V$. Betrachte eine orthonormale Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V und die Matrix $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ repräsentiere f in diese Basis. Zeigen Sie, dass $a_{ij} = a_{ji}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
(w_1 + w_2) \wedge \eta &= w_1 \wedge \eta + w_2 \wedge \eta, \\
w \wedge (\eta_1 + \eta_2) &= w \wedge \eta_1 + w \wedge \eta_2, \\
aw \wedge \eta &= w \wedge a\eta = a(w \wedge \eta), \\
w \wedge \eta &= (-1)^{kl} \eta \wedge w, \\
f^*(w \wedge \eta) &= f^*(w) \wedge f^*(\eta),
\end{aligned}$$

für $w, w_1, w_2 \in \Omega^k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Omega^l(V)$, $a \in \mathbb{R}$, und $f : V \mapsto V$ linear.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachte eine lineare Funktion $f : V \mapsto V$ mit $\dim V = n$. Zeigen Sie, dass $f^* w = \det f \cdot w$, für $w \in \Omega^n(V)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachte die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ und die Dualbasis $\phi_1, \ldots, \phi_n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \phi_{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \phi_{i_k}(v_1, \ldots, v_k) = \det\left(\{v_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=i_1,\ldots,i_k}}\right)$.

Abgabetermin : Mittwoch, 06.06.10 vor der Vorlesung.