Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2012

Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f^* (w_1 + w_2) &= f^* w_1 + f^* w_2, \\ f^*(g \cdot w) &= (g \circ f) \cdot f^* w, \\ f^*(w \wedge \eta) &= f^* w \wedge f^* \eta, \end{aligned}$$

wobei $w, w_1, w_2 \in \Omega^k (\mathbb{R}^m)$, $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, und $\eta \in \Omega^l (\mathbb{R}^m)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $c : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^n$ differenzierbar (c ist eine Kurve in $\mathbb{R}^n$). Betrachten Sie den Tangentialvektor $v = c_* \left((e_1)_t \right) = \left((c^1)' (t), \ldots, (c^n)' (t) \right)_{c(t)}$. Zeigen Sie, dass wenn $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, dann ist $f_* (v)$ der Tangentialvektor zu $f \circ c : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^m$ in t.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^2$, $f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Betrachten Sie die Inverse von f aufgeschrieben als $f^{-1} \left(x^1, x^2 \right) = P \left(r \left(x^1, x^2 \right), \theta \left(x^1, x^2 \right) \right)$, wobei r und θ skalarwertige Funktionen sind. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}\theta = \frac{-x^2}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} \mathrm{d}\mathbf{x}^1 + \frac{x^1}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} \mathrm{d}\mathbf{x}^2.$$

Berechnen Sie auch $\mathrm{d}r$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei F ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Formen

$$\begin{aligned} w_F^1 &= F^1 \mathrm{d}\mathbf{x}^1 + F^2 \mathrm{d}\mathbf{x}^2 + F^3 \mathrm{d}\mathbf{x}^3, \\ w_F^2 &= F^1 \mathrm{d}\mathbf{x}^2 \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}^3 - F^2 \mathrm{d}\mathbf{x}^1 \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}^3 + F^3 \mathrm{d}\mathbf{x}^1 \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}^2. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= w^1_{\mathrm{grad} f}, \\ \mathrm{d}\left(w_F^1\right) &= w^2_{\mathrm{curl} F}, \\ \mathrm{d}\left(w_F^2\right) &= (\mathrm{div} F)\, \mathrm{d}\mathbf{x}^1 \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}^2 \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}^3. \end{aligned}$$

(b) Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \text{curl grad } f &= 0, \\ \text{div curl } F &= 0. \end{aligned}$$

(c) Sei F ein Vektorfeld auf der sternförmigen, offenen Menge A. Zeigen Sie, dass wenn curl $F = 0$, eine Funktion $f : A \mapsto \mathbb{R}$ existiert, so dass $F = \text{grad } f$. Zeigen Sie auch, dass wenn div $F = 0$, ein Vektorfeld G auf A existiert, so dass $F = \text{curl } G$.

Abgabetermin : Mittwoch, 13.06.12 vor der Vorlesung.