Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Formen auf $\mathbb{R}^n$
(a) $w = d\mathbf{x}^1$, (b) $w = \left(x^1\right)^2 d\mathbf{x}^1$, (c) $w = x^2 d\mathbf{x}^1$, (d) $w = d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2$, (e) $w = x^1 x^2 d\mathbf{x}^1 \wedge d\mathbf{x}^2$.
Bestimmen Sie für jede Form, ob sie geschlossen und/oder exakt ist. Wenn die Form w exakt ist, finden Sie die Form η, sodass $w = d\eta$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie eine differenzierbare Funktion $c : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^n$ (c ist eine Kurve in $\mathbb{R}^n$) mit der Eigenschaft, dass $|c\,(t)\,| = 1$ für alle $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass der Tangentialvektor $\left(\left(c^1\right)'(t)\,, \ldots, \left(c^n\right)'(t)\right)_{c(t)}$ senkrecht auf $\left(c\,(t)\right)_{c(t)}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit differenzierbarer Inverser $f^{-1} : f\,(U) \mapsto \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass alle geschlossenen Formen auf $F\,(U)$ exakt sind falls alle geschlossene Formen auf U exakt sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden singulären 1-Würfel auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$c_{R,n}\,(t) = \left(R\cos\left(2\pi n t\right), R\sin\left(2\pi n t\right)\right),$$

wobei $R > 0$. Zeigen Sie, dass es einen singulären 2-Würfel $c : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ gibt, sodass

$$\partial c = c_{1,n} - c_{2,n}.$$

Abgabetermin : Mittwoch, 20.06.12 vor der Vorlesung.