Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
SS 2012

Blatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie einen 4-dimensionalen Vektorraum V.

(a) Zeigen Sie, dass es eine symmetrische, bilineare Funktion $B : \Omega^2(V) \times \Omega^2(V) \mapsto \mathbb{R}$ gibt, sodass
$$\omega \wedge \eta = B(\omega, \eta)\, \tilde{\omega},$$
wobei $\tilde{\omega}$ ein Volumenelement ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\omega = 0$, falls $B(\omega, \eta) = 0$ für alle $\eta \in \Omega^2(V)$. Ist B positiv definit?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass ∂M eine $(k-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist und dass $M \setminus \partial M$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Es seien $k < n$ und M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M vom Maß Null ist.

(b) Betrachten Sie eine geschlossene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, die eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M ist. Zeigen Sie, dass der Rand der Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ gleich dem Rand der Mannigfaltigkeit M ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel, wenn M nicht geschlossen ist?

(c) Sei M eine kompakte Menge die eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand in $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie, dass M Jordan-messbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $x \in M$, wobei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass
$$M_x = \left\{ c_*\left((e_1)_t\right) \in \mathbb{R}^n_x : c : [0,1] \mapsto M \text{ differenzierbar und } c(t) = x \right\}.$$

Abgabetermin : Mittwoch, 04.07.12 vor der Vorlesung.