Universität des Saarlandes
Fachbereich 6.1 Mathematik
Dr. R. Grzibovskis

Übungen zur Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2012

Blatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei M eine Mannigfaltigkeit, die alle Bedingungen des Satzes von Stokes erfüllt. Zeigen Sie genau, warum der Satz von Stokes für die Mannigfaltigkeit $M \setminus \partial M$ nicht gilt.

(b) Zeigen Sie, dass der Satz von Stokes auch für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten M gilt, falls der Träger $\operatorname{supp} \omega \subset M$ kompakt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit M und eine k-Form ω, sodass $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie, dass M orientierbar ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie eine orientierte $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) in $\mathbb{R}^n$ und die $(n-1)$-Formen

$$\omega_i = (-1)^{i+n} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathrm{d}\mathbf{x}^j, \ i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass das Volumenelement dV auf M die folgenden Eigenschaften hat

$$\begin{aligned} dV &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}^i \omega_i, \\ \mathbf{n}^i dV &= \omega_i, \ i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{n} : M \mapsto S^{n-1}$ der äußere Einheitsnormalenvektor.
Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe 4 aus dem Übungsblatt 6.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie eine kompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand in $\mathbb{R}^n$ mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n} : \partial M \mapsto S^{n-1}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_M \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial M} \langle F, \mathbf{n} \rangle \, dS,$$

wobei $F : M \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, dV das Volumenelement auf M, und dS ein Volumenelement auf ∂M.
Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe 3.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $B_a = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq a\}, \ a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$V_n(B_a) = \frac{a}{n} V_{n-1}(\partial B_a),$$

wobei $V_k(C)$ den k-dimensionalen Volumeninhalt von C bezeichnet.
Hinweis: Benutzen Sie die Aufgabe 4 mit $F(x) = (x)_x$.

Abgabetermin : Montag, 16.07.12 vor der Vorlesung.