

Kapitel 1

Mengen

1.1 Motivation

Der Mengenbegriff ist von grundlegender Bedeutung in vielen Bereichen der Informatik, z.B. bei Datenbanken.

1.2 Definition: Menge

Unter einer Menge M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.

1.3 Anmerkungen

- a) Dieser Mengenbegriff geht auf Georg Cantor (1845-1918) zurück. Er begründete die moderne Mengenlehre.
- b) Der Mengenbegriff ist nicht unumstritten und widerspruchsfrei, genügt jedoch unseren Anwendungen.

Beispiel: Der Barbier rasiert alle Menschen, die sich selbst nicht rasieren. Wer rasiert den Barbier?

- c) Die Elemente einer Menge werden in geschweiften Klammern eingeschlossen.

Beispiel: $\{4, 1, 5\}$

- d) Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle. Wir unterscheiden also nicht zwischen $\{4, 1, 5\}$ und $\{1, 4, 5\}$. Ebenso spielen Wiederholungen keine Rolle. Wir identifizieren also $\{1, 4, 5\}$ und $\{1, 1, 4, 5\}$.

e) Symbole für wichtige Mengen:

$$\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\} : \text{natürliche Zahlen mit } \{0\}$$

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} : \text{ganze Zahlen}$$

$$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} : \text{rationale Zahlen}$$

$$\mathbb{R} : \text{reelle Zahlen}$$

$$\emptyset, \{\} : \text{leere Menge (enthält kein Element)}$$

1.4 Definition: Teilmenge

- A heißt Teilmenge von B (d.h. $A \subset B$ oder $B \supset A$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist: $x \in A \Rightarrow x \in B$.
- In diesem Fall nennt man B auch Obermenge von A .
- Zwei Mengen A und B sind gleich ($A = B$), falls $A \subset B$ und $B \subset A$. Andernfalls sind sie ungleich ($A \neq B$).
- Falls $A \subset B$ und $A \neq B$, schreibt man auch $A \subsetneq B$ und sagt: A ist echt enthalten in B .
- Ist A nicht Teilmenge von B , schreibt man $A \not\subset B$.

1.5 Bemerkungen

- Beziehungen zwischen Mengen kann man durch so genannte Venn-Diagramme (nach John Venn (1834-1923)) veranschaulichen.
- \emptyset ist Teilmenge von jeder Menge.

Warum? Es existiert kein Element in \emptyset , das nicht zu A gehört.

1.6 Definition: Potenzmenge

Ist M eine Menge, so heißt

$$P(M) := \{X \mid X \subset M\}$$

die Potenzmenge von M .

1.7 Beispiele

- a) $M = \{1, 2\}$, $P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
 b) $M = \{a, b, c\}$, $P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
 c) $M = \emptyset$, $P(M) = \{\emptyset\}$

Allgemein gilt: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat 2^n Elemente.

1.8 Operationen auf Mengen

Durchschnitt (Schnittmenge) zweier Mengen M und N :

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$$

M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.

Beispiel: $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 3, 5\}$, $S = \{5, 7, 8\}$

$M \cap N = \{3, 5\}$, $(M \cap N) \cap S = \{5\}$

Vereinigung zweier Mengen M und N :

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

Dabei darf x auch in beiden Mengen sein ("oder" ist kein "exklusives oder").

Differenzmenge

$$M \setminus N := M - N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

$M \setminus N$ heißt auch Komplement von N in M , Schreibweise: \overline{N}^M .

Wenn die Grundmenge klar ist schreibt man meist \overline{N} oder N^C .

1.9 Satz (Rechenregeln für Durchschnitte und Vereinigungen)

Seien M, N und S Mengen. Dann gelten folgende Gesetze:

- a) Kommutativgesetze:
- i) $M \cup N = N \cup M$
 - ii) $M \cap N = N \cap M$

b) Asoziativgesetze:

$$\text{i) } (M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$$

$$\text{ii) } (M \cap N) \cap S = M \cap (N \cap S)$$

c) Distributivgesetze

$$\text{i) } M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S)$$

$$\text{ii) } M \cup (N \cap S) = (M \cup N) \cap (M \cup S)$$

Ferner gilt für jede Menge M

$$\text{i) } M \cup \emptyset = M$$

$$\text{ii) } M \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{iii) } M \setminus \emptyset = M$$

Beweis von (c)(i).

Zu zeigen:

$$\underbrace{M \cap (N \cup S)}_{=:A} = \underbrace{(M \cap N) \cup (M \cap S)}_{=:B}$$

Um $A = B$ zu zeigen, zeigen wir, dass $A \subset B$ und $B \subset A$.

" $A \subset B$ " : Sei

$$x \in A \Rightarrow x \in M \text{ und } (x \in N \text{ oder } x \in S)$$

.

Falls $x \in N$: $x \in M \cap N \Rightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap S) = B$.

Falls $x \in S$: $x \in S \cap M \Rightarrow x \in (M \cap S) \cup (M \cap N) = B$.

" $B \subset A$ " : Sei

$$x \in B \Rightarrow x \in M \cap N \text{ oder } x \in M \cap S$$

.

Falls $x \in M \cap N$: $\Rightarrow x \in M$ und $x \in N$

$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in N$)

$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$).

Falls $x \in M \cap S$: $\Rightarrow x \in M$ und $x \in S$

$\Rightarrow x \in N \cup S$ (wegen $x \in S$)

$\Rightarrow x \in M \cap (N \cup S) = A$ (wegen $x \in M$)

■

1.10 Satz (Rechenregeln für Komplementbildung)

Bei Mengen M, N innerhalb einer Grundmenge G gilt:

$$\text{a) } M \setminus N = M \cap \overline{N}$$