**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FR 6.1 Mathematik**
**Dr. Richards Grzibovskis**

1. Übung zur Vorlesung

# Integralgleichungen und Randelemente

**Wintersemester 2016-2017**

---

## 1. Aufgabe

*4 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/(t-1)}, & \text{falls } t < 1, \\ 0, & \text{falls } t \geq 1, \end{cases}$$

beliebig oft stetig differenzierbar ist.

## 2. Aufgabe

*4 Punkte*
Betrachten Sie die Funktion $U^* : \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x \neq y\} \to \mathbb{R}$

$$U^*(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x - y|, & \text{falls } d = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{|x - y|}, & \text{falls } d = 3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\Delta_x U^*(x, y) = 0$ gilt, und finden Sie $\nabla_x U^*(x, y)$.

## 3. Aufgabe

*4 Punkte*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$, so dass der äußere Normalvektor $n(x)$ für alle $x \in \Gamma$ existiert. Leiten Sie die erste Greensche Formel

$$-\int_\Omega \operatorname{div}\left(A\left(x\right)\nabla u(x)\right) v(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(A\left(x\right)\nabla u(x)\right)^\top \nabla v(x) \mathrm{d}x - \int_\Gamma \left(A\left(x\right)\nabla u(x)\right)^\top n(x) v(x) \mathrm{d}S_x$$

für die matrixwertige glatte Funktion $A : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ und zwei glatte funktionen $u, v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die zweite Greensche Formel

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \operatorname{div}\left(A\left(x\right)\nabla u(x)\right) v(x) \mathrm{d}x + \int_\Gamma \left(A\left(x\right)\nabla u(x)\right)^\top n(x) v(x) \mathrm{d}S_x = \\ -\int_\Omega \operatorname{div}\left(A\left(x\right)\nabla v(x)\right) u(x) \mathrm{d}x + \int_\Gamma \left(A\left(x\right)\nabla v(x)\right)^\top n(x) u(x) \mathrm{d}S_x \end{aligned}$$

gilt.

## 4. Aufgabe

*4 Punkte*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, dessen rand $\Gamma = \partial\Omega$ sei gegeben durch eine zweimal stetig differenzierbare reguläre Parametrisierung $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\beta^{(j)}(0) = \beta^{(j)}(1)$, $j = 0, 1, 2$. Der Doppelschichtoperator (der Laplace Gleichung) ist gegeben durch

$$(Kw)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 k(s,t)w(t)\mathrm{d}t, \text{ wobei } k(s,t) = \frac{(\beta(s) - \beta(t))^\top n(t)}{|\beta(s) - \beta(t)|^2} |\beta'(t)|.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{s \to t} k(s,t) = \frac{\beta''(t)^\top n(t)}{2|\beta'(t)|}$$

gilt.