UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

1. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Abgabe: Dienstag, 29.4.2014, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

0.5 + 1 + 2.5 +1 Punkte

Betrachten Sie die nichtlineare Gleichung

$$\frac{1}{2}e^{-x^2} - x = 0.$$

Gesucht ist die Lösung $\overline{x} \geq 0$.

1. Formulieren Sie ein Fixpunktproblem $x = g(x)$ zur Bestimmung von $\overline{x}$.
2. Bestimmen Sie ein geeignetes Intervall D mit $g(D) \subseteq D$.
3. Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen den Fixpunkt $\overline{x} \geq 0$ konvergiert.
4. Berechnen Sie, wie viele Schritte a priori nötig sind, um ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ einen Fehler $|x_n - \overline{x}| < 10^{-4}$ zu garantieren.

2. Aufgabe

1 + 1 + 1 + 3 Punkte

Die Funktion

$$g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x)$$

besitzt in $D = [0.7, 0.9]$ einen Fixpunkt $\overline{x}$. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.)

1. Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.82$ die erste drei Folgenglieder x_1, x_2, x_3 der Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$. Was stellen Sie fest?
2. Wieso stellt das Ergebnis aus 1. keinen Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz dar?
3. Transformieren Sie die Gleichung $x = g(x)$ auf ein Fixpunktproblem der Form $x = f(x)$ mit $f(x) = 1 - e^{-2x}$.
4. Beweisen Sie, dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen den Fixpunkt $\overline{x}$ konvergiert.

3. Aufgabe

1 + 1 + 1.5 + 1.5 Punkte

Gegeben Sei die Gleichung

$$x^3 + 7 - e^x = 0.$$

1. Bestimmen Sie anhand einer Skizze die ungefähre Lage der Nullstellen.
2. Formulieren Sie die Rekursionsgleichung des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstellen.
3. Berechnen Sie die erste fünf Iterationsschritte zur Approximation der Nullstelle $\overline{x} > 0$ ausgehend von $x_0 = 5$. Runden Sie dabei jeweils auf die fünfte Nachkommastelle.
4. Die Gleichung lässt sich alternativ auch als Fixpunktproblem

$$x = \ln(x^3 + 7)$$

formulieren. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Bestimmen Sie die erste fünf Folgenglieder der entsprechenden Fixpunktiteration mit $x_0 = 5$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Approximation aus 3.